CÁLCULO 3

19/06/24 - AULA 14

Na aula passada estudamos o importante conceito de diferencial para funções $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Vimos que, f é diferenciável em $a \in \text{int}(\Omega)$ se, e somente se (def.) $\exists\, L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ transformação linear tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Nas bases canônicas, a matriz $[L]_{n \times m}$, nas bases canônicas chama-se MATRIZ JACOBIANA de f no ponto a, e é dada por; sendo $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, com

$$f_i(x) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

então:

$$d_a f = [L]_{n \times m} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2m} \\ - & - & - & - \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m}(a), \quad \text{onde}$$

$$f_{ij}(a) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

Vejamos mais um exemplo:

Ex.: Dada $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$f(x,y,z) = \left(e^{x+yz}, \cos(xz), x^2+y^2+z^2, \sqrt{x+y} \right)$$

Obter: $d_a f$, quando $a = \left(1, 0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Solução:

$d_a f = [L]_{4\times 3}$; onde:

$$d_a f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} \end{bmatrix}$$

$f_1 = e^{x+yz}$

$f_2 = \cos xy$

$f_3 = x^2+y^2+z^2$

$f_4 = \sqrt{x+y} = (x+y)^{\frac{1}{2}}$

$(r^k)' = k.r^{k-1}.r'$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x} & \frac{\partial f_4}{\partial y} & \frac{\partial f_4}{\partial z} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{x+yz} & z.e^{x+yz} & y.e^{x+yz} \\ -y.\operatorname{sen} xy & -x.\operatorname{sen} xy & 0 \\ 2x & 2y & 2z \\ \frac{1}{2\sqrt{x+y}} & \frac{1}{2\sqrt{x+y}} & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$d_af = [L](a) = [L]\left(1, 0, \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{1+0.\frac{\pi}{4}} & \frac{\pi}{4}.e^{1+0.\frac{\pi}{4}} & 0.e^{1+0.\frac{\pi}{4}} \\ 0 & -1.\operatorname{sen}(0) & 0 \\ 2.1 & 2.0 & 2\frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{2\sqrt{1+0}} & \frac{1}{2\sqrt{1+0}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e & \frac{\pi}{4}.e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

PROP.: Se $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ for diferenciável em $a \in \operatorname{int}(\Omega)$, então f é contínua.

DEMONSTR.: De fato, como f é diferenciável em a, então $\exists\ L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ transf. linear tal que

$$f(x) = f(a) + L(x-a) + \|x-a\|.\,r(x-a);$$

onde $\lim_{x \to a} \frac{r(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$

Então;

$$f(x) - f(a) = L(x-a) + \|x-a\| \cdot r(x-a)$$

Tomando o limite com $x \to a$, obtemos:

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = \lim_{x \to a} L(x-a) + \|x-a\| \cdot r(x-a)$$

$$= \underbrace{L(0)}_{=0} + \|0\| \cdot 0 = 0$$

pois L é transformação linear.

Logo, obtemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0, \text{ ou seja,}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \text{ i.e.,}$$

f é contínua no ponto $a \in \operatorname{int}(\Omega)$.

$\square$

Vamos considerar o restante da aula como uma aula de exercícios diversos para revisão da 1ª PROVA.

LISTA 01:

3. Seja $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos. Mostre que

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

é uma métrica em $\mathbb{R}^+$.

Solução: Precisamos verificar a positividade (i), simetria (ii) e a desigualdade triangular (iii).

Sejam, $x, y, z \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$. Então:

(i) POSITIVIDADE:

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \geq 0 \quad e$$

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(ii) SIMETRIA: $d(x,y) \overset{?}{=} d(y,x)$

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| = d(y,x).$$

pois $|a-b| = |b-a|$

(iii) DESIGUALDADE TRIANGULAR: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$?

De fato:

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right| + \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right| = d(x,z) + d(z,y)$$

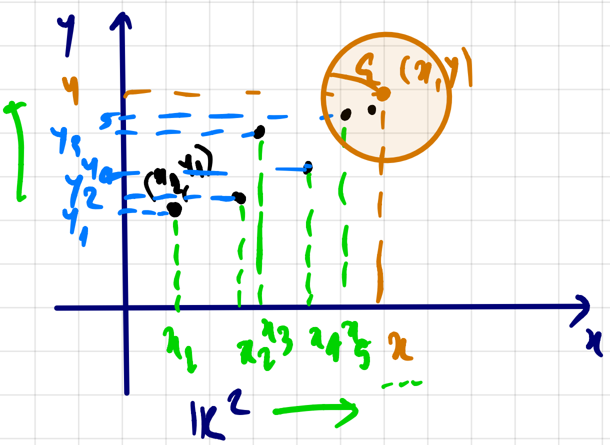
DESIGUALDADE TRIANGULAR DO MÓDULO.

$|a+b| \leq |a| + |b|$

Portanto, a aplicação d define uma métrica em $\mathbb{R}^+$, e, com isso, tem-se que $(\mathbb{R}^+, d)$ é um espaço métrico.

LL.

6. Mostre que $(x_n, y_n) \to (x, y)$ em $\mathbb{R}^2$, com a métrica usual se, e somente se, $x_n \to x$ e $y_n \to y$ em $\mathbb{R}$ com a métrica usual.



Suponha que $(x_n, y_n) \to (x, y)$

Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$

$$\Longrightarrow d_2((x_n, y_n); (x, y)) < \varepsilon$$

Precisamos mostrar que $x_n \to x$ e $y_n \to y$ em $\mathbb{R}$.

Para o $\varepsilon > 0$ dado, tem-se $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $\forall n \geq n_0$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon.$$

Então, $\sqrt{(x_n - x)^2} < \varepsilon$ e $\sqrt{(y_n - y)^2} < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.

POIS; POR EX.:

$$\sqrt{(x_n - x)^2} \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon$$

Ou seja; temos: $|x_n - x| < \varepsilon$ e $|y_n - y| < \varepsilon$,

$\forall n \geq n_0$.

Resumindo, obtemos que, $\forall \varepsilon > 0$ dado, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, implica em:

$$|x_n - x| < \varepsilon \; ;$$

e

$$|y_n - y| < \varepsilon \; ;$$

Ou seja, mostramos que $x_n \to x$ e que $y_n \to y$.

L1:

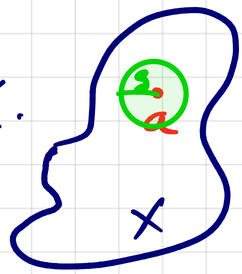
7. Para quaisquer $X, Y \subset \mathbb{R}$, prove que

(a) $\text{int}(X \cap Y) = \text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$.

(b) $\text{int}(X) \cup \text{int}(Y) \subset \text{int}(X \cup Y)$.

Solução: Lembre que int.(X) é o conj. de todos os pontos interiores do conj. X; e que,

$$a \in \text{int}\, X \overset{\text{def.}}{\iff} \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } B_\delta(a) \subset X.$$



(a) $\text{int}(X \cap Y) = \text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$.

AF. 01: $\text{int}(X \cap Y) \subset \text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$:

Dado $a \in \text{int}(X \cap Y)$ qualquer, precisamos mostrar que $a \in \text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$.

Como $a \in \text{int}(X \cap Y)$, então, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$B_\delta(a) \subset X \cap Y;$$

Logo, $B_\delta(a) \subset X$ e $B_\delta(a) \subset Y$, c.f. conceito de interseção de conjuntos. Disso, temos que

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ B_\delta(a) \subset X \overset{\text{def.}}{\iff} a \in \text{int}\, X; \\ \bullet\ B_\delta(a) \subset Y \overset{\text{def.}}{\iff} a \in \text{int}\, Y \end{array}\right\} \Rightarrow a \in \text{int}\, X \cap \text{int}\, Y$$

Pela arbitrariedade da escolha do ponto a, concluímos a AF.01.

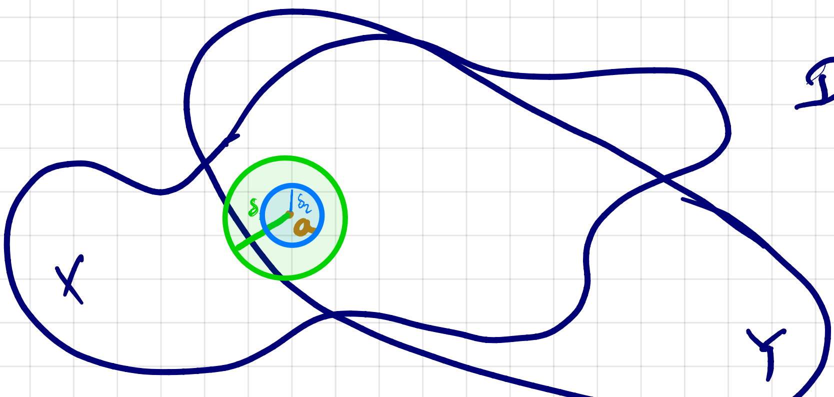
AF.02: $\text{int}(X) \cap \text{int}(Y) \subset \text{int}(X \cap Y)$:

Dado $a \in \text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$, precisamos mostrar que $a \in \text{int}(X \cap Y)$.

Como $a \in \text{int}\, X \cap \text{int}\, Y$, então segue que

$a \in \text{int}\, X$ e $a \in \text{int}\, Y$.

Logo, $\exists\, \delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $B_{\delta_1}(a) \subset X$ e $B_{\delta_2}(a) \subset Y$.



Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$.

Assim, teremos que:

$$B_\delta(a) \subset X \quad e \quad B_\delta(a) \subset Y \Rightarrow B_\delta(a) \subset X \cap Y;$$

ou seja;

$$a \in \operatorname{int}(X \cap Y).$$

Pela arbitrariedade da escolha do ponto a, segue a AF·02.

Por fim, pelas afirmações 01 e 02 segue a igualdade desejada.

(b) $\operatorname{int}(X) \cup \operatorname{int}(Y) \subset \operatorname{int}(X \cup Y)$:

Dado $a \in \operatorname{int}(X) \cup \operatorname{int}(Y)$, precisamos mostrar que $a \in \operatorname{int}(X \cup Y)$.

Se $a \in \operatorname{int}(X) \cup \operatorname{int}(Y)$, então

$$a \in \operatorname{int} X \quad \text{ou} \quad a \in \operatorname{int} Y.$$

- se $a \in \operatorname{int} X$: então, $\exists\ \delta > 0$ tal que

  $B_\delta(a) \subset X \subset X \cup Y$. Logo, $a \in \operatorname{int}(X \cup Y)$

- se $a \in \operatorname{int} Y$: então, $\exists\ \delta_1 > 0$ tal que

  $B_{\delta_1}(a) \subset Y \subset X \cup Y$. Logo, $a \in \operatorname{int}(X \cup Y)$.

Ou seja, temos

$$a \in \operatorname{int} X \text{ ou } a \in \operatorname{int} Y \Rightarrow a \in \operatorname{int}(X \cup Y)$$

$$P \text{ ou } Q \,;\; P \to R \,;\; Q \to R \Rightarrow R \,.$$ (lógica)

[ELIMINAÇÃO DO CONECTIVO OU]

Portanto, $a \in \operatorname{int}(X \cup Y)$. Pela arbitrariedade da escolha do ponto a, segue que

$$\operatorname{int}(X) \cup \operatorname{int}(Y) \subset \operatorname{int}(X \cup Y).$$

8. Mostrar com um exemplo que, dados $X, Y \subset \mathbb{R}$, $\operatorname{int}(X \cup Y) \neq \operatorname{int}(X) \cup \operatorname{int}(Y)$.

Solução: Vimos no exercício anterior que

$$\operatorname{int}(X) \cup \operatorname{int}(Y) \subset \operatorname{int}(X \cup Y).$$

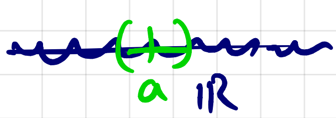
Então, deverá ser falsa a contenção contrária. Ou seja, teremos que concluir, com um exemplo.

$$\operatorname{int}(X \cup Y) \not\subset \operatorname{int}(X) \cup \operatorname{int}(Y)$$

Tome $X = \mathbb{Q}$; $Y = \mathbb{I}$.

Então $X \cup Y = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$; e

$$\operatorname{int}(X \cup Y) = \operatorname{int} \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$



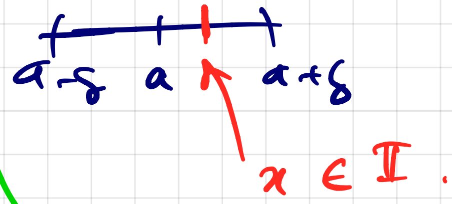
Porém,

$$\operatorname{int} \mathbb{Q} = \emptyset$$

$$\forall a \in \mathbb{Q}, \ \forall \delta > 0,$$

$$B_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta) \not\subset \mathbb{Q}$$

↳ Pois um intervalo qualquer possuirá números racionais e irracionais. Isso chama-se propriedade da densidade de $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{I}$ em $\mathbb{R}$.



Do mesmo modo, tem que

$$\operatorname{int} \mathbb{I} = \emptyset$$

Disso, temos: $\operatorname{int} \mathbb{Q} \cup \operatorname{int} \mathbb{I} = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

então, se, por absurdo, vale que

$$\operatorname{int}(X \cup Y) \subset \operatorname{int}(X) \cup \operatorname{int}(Y),$$

então, neste caso, teremos:

$$\mathbb{R} = \operatorname{int} \mathbb{R} = \operatorname{int}(X \cup Y) \subset \operatorname{int} X \cup \operatorname{int} Y = \emptyset$$

$$\Longrightarrow \mathbb{R} \subset \emptyset,$$ um absurdo!

Portanto, $\mathrm{int}(X \cup Y) \not\subset \mathrm{int}(X) \cup \mathrm{int}(Y)$.

L1

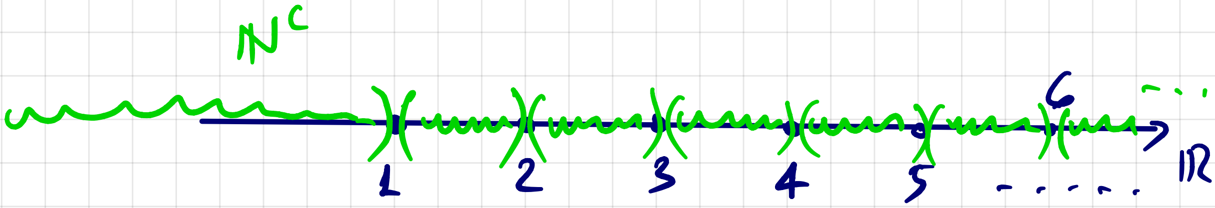
13. Mostre que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é um fechado de $\mathbb{R}$.

<u>Solução</u>: Vimos em aula que

$X \subset M$ é fechado de $M \iff X^c$ é aberto de M.

Neste caso,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$



$$\mathbb{N}^c = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup \cdots$$

é uma união de abertos de $\mathbb{R}$ e portanto, $\mathbb{N}^c$ é um aberto de $\mathbb{R}$.

Conclusão: $\mathbb{N}$ é um fechado de $\mathbb{R}$.