CÁLCULO 3

17/06/24 – AULA 13

DIFERENCIABILIDADE EM $\mathbb{R}^m$.

Do Cálculo 1, temos o seguinte resultado:

PROP.: Se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ for derivável em (a,b), então f é contínua.

Será que este resultado continua válido para mais variáveis?

Por exemplo, considere $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Afirmamos que f não é contínua na origem. De fato, se calcularmos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ por caminhos diferentes, encontraremos resultados diferentes:

- $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}\frac{0}{x^2}=0$$

- $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{x\cdot x}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$$

$\neq$

Portanto, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Logo não tem como acontecer a igualdade: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$.

Logo, f não é contínua em (0,0).

Porém:

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x \cdot 0}{\Delta x^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{0 \cdot \Delta y}{0^2 + \Delta y^2} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} 0 = 0.$$

Conclusão: f não é contínua na origem, mas existem as derivadas parciais na origem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Confrontando com o recordado do cálculo 1, que (por transposição) temos que: se f não for contínua, então f não é derivável. parece que a conclusão acima é um tanto 'absurda' para mais variáveis.

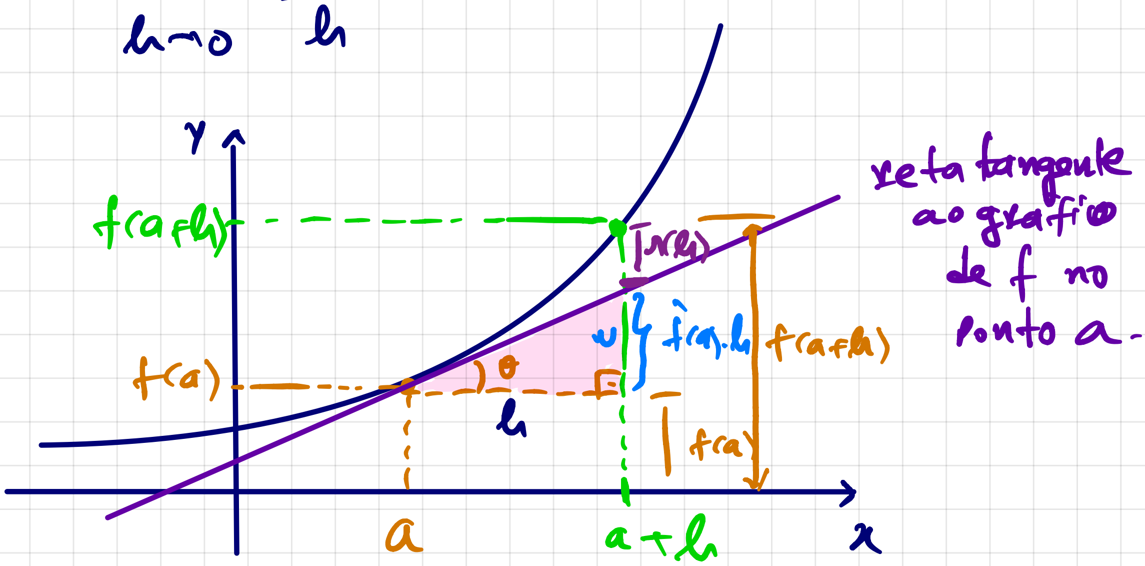
Porém, acima comparamos continuidade com derivação parcial, e não com o conceito geral de DIFERENCIABILIDADE, que vamos apresentar em seguida.

Ou seja, o resultado para várias variáveis também valerá; ou seja, mostraremos que: se f for Diferenciável então será contínua.

Recordando do CÁLCULO I, $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será diferenciável em um ponto $a \in I \subset \mathbb{R}$ se, e somente se, existir um $L \in \mathbb{R}$ tal que, $\forall h \in \mathbb{R}$.

$$f(a+h) = f(a) + L \cdot h + r(h); \quad \text{onde}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \quad [r(h) \text{ chama-se RESTO}]$$



$$\tan\theta = \frac{w}{h} \Rightarrow w = \underbrace{\tan\theta}_{= f'(a)} \cdot h = f'(a) \cdot h$$

$$\Rightarrow f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + r(h), \quad \text{com}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \quad ; \quad \text{No caso,}$$

$$f'(a) := L \in \mathbb{R}$$

Neste caso, definimos o diferencial de f no ponto a por

$$df(a) = f'(a).h.$$

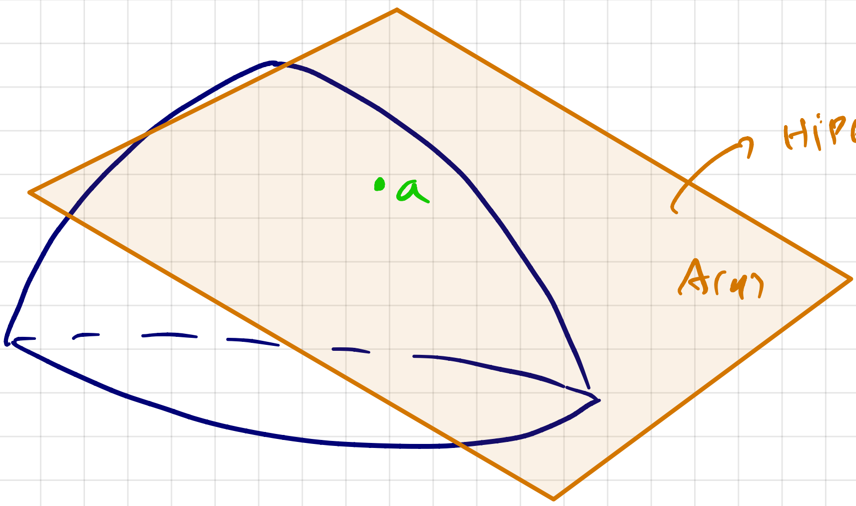
Vamos procurar uma versão deste conceito para funções $\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$.

Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $a \in \mathrm{int}(\Omega)$.

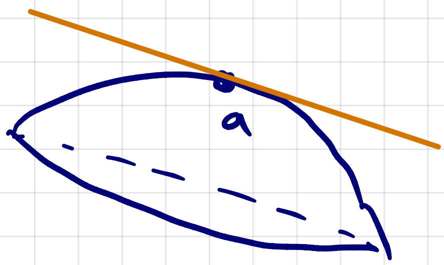
A ideia da diferenciabilidade em $a \in \mathbb{R}^m$ será aproximar a f, numa vizinhança do ponto a, por uma função afim $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$A(x) = L(x) + b \quad , \quad \text{onde}$$

$L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ será uma transformação linear e $b \in \mathbb{R}^n$.



VISTA TRANSVERAL:



Para que $A(x)$ seja uma aproximação linear de f no ponto A, devemos impor a condição de que

$$\boxed{A(a) = f(a)} \qquad (I)$$

Além disso, para x próximo de a, devemos ter $f(x) \approx A(x)$

Note que:

$$A(x) - A(a) = L(x) + b - (L(a) + b)$$

$$= L(x) + \cancel{b} - L(a) - \cancel{b} =$$

$$= L(x) - L(a) = L(x-a)$$

pois L é uma transf. linear.

Assim:

$$A(x) - \underbrace{A(a)}_{\substack{= f(a) \\ \text{por } (I)}} = L(x-a)$$

$$\Rightarrow A(x) - f(a) = L(x-a)$$

$$\Rightarrow A(x) = f(a) + L(x-a)$$

Além disso:

$$\lim_{x\to a} A(x) = \lim_{x\to a} f(a) + L(x-a)$$

$$= \lim_{x\to a} f(a) + \lim_{x\to a} L(x-a)$$

$$= f(a) + \underbrace{L(0)}_{=0,\ \text{pois } L \text{ é transf. linear.}} = f(a)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} A(x) = f(a) \underset{\text{por (I)}}{=} A(a)$$

Então, temos que $A(x)$ de fato serve como uma aproximação para f em $a \in \mathbb{R}^m$. Além disso, A é contínua, pois

$$\lim_{x\to a} A(x) = A(a).$$

Redefina $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$; com $a \in \text{int}(\Omega)$, por:

$$(*) \quad f(x) = f(a) + L(x-a) + \|x-a\| \cdot r(x-a),$$

$a + h = x$

$x - a = h$

onde $\|x-a\| = d(x,a)$ e $\lim_{x \to a} \frac{r(x-a)}{\|x-a\|} = 0$

Note que

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = \lim_{x \to a} L(x-a) + \|x-a\| . r(x-a)$$

$$= \lim_{x \to a} L(x-a) + \lim_{x \to a} \|x-a\| . r(x-a)$$

$$= L(0) + 0 = 0$$

ou seja, como é definida em (*), f é contínua.

Note que:

$$\lim_{x \to a} \frac{\overbrace{f(x) - f(a) - L(x-a)}^{\|x-a\| . r(x-a)}}{\|x-a\|} =$$

$$\lim_{x \to a} \frac{\cancel{\|x-a\|} . r(x-a)}{\cancel{\|x-a\|}} = \lim_{x \to a} r(x-a) = 0$$

Isto fornece a seguinte definição:

Def.: Dizemos que $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em um ponto $a \in \mathbb{R}^m$ se, e só se:

(i) $a \in \text{int}(\Omega)$

(ii) $\exists$ $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ transformação linear tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Neste que L será a diferencial de f no ponto $a \in \mathbb{R}^m$, e escrevemos

$$L = d_a f.$$

Sendo $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma transf. linear, então existe uma matriz $[L]_{n \times m}$ dessa transformação.

Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável em $a \in \text{int}(\Omega)$; e considere a base canônica do $\mathbb{R}^m$: $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, onde

$$e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

posição i

Ex.: $\mathbb{R}^3$: $e_1 = (1, 0, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0)$; $e_3 (0, 0, 1)$

Dado $t>0$ suficientemente pequeno tal que

$$x_i = a + t \cdot e_i \in \mathrm{int}(\Omega)$$

Então, se f for diferenciável em x_i; teremos; $\exists\, L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear tal que

$$0 = \lim_{x_i \to a} \frac{f(x_i) - f(a) - L(x_i - a)}{\| x_i - a \|}, \quad i \cdot e_i,$$

$$0 = \lim_{x_i \to a} \frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a) - L(\cancel{a} + t e_i - \cancel{a})}{\| \cancel{a} + t \cdot e_i - \cancel{a} \|}$$

Note que $x_i \to a \iff t \to 0$, e com isso, obtemos:

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t e_i) - f(a)}{\| t \cdot e_i \|} - \lim_{t \to 0} \frac{L(t \cdot e_i)}{\| t e_i \|};$$

e como

$$\| t e_i \| = |t| \cdot \underbrace{\| e_i \|}_{=1} = t \cdot 1 = t,$$

$$\sqrt{0^2 + 0^2 + \dots + 1^2 + 0^2 + \dots 0^2} = 1$$

então:

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\cdot e_i) - f(a)}{t} - \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{\cancel{t}\cdot L(e_i)}{\cancel{t}}}$$

Pois L é transf. linear.

$L(\vec{u}+\vec{v}) = L(\vec{u}) + L(\vec{v})$

$L(\alpha\,\vec{u}) = \alpha \cdot L(\vec{u})$

$$\Rightarrow \lim_{t\to \infty} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} = L(e_i)$$

$$L(e_i) = d_a f(e_i)$$

$$\lim_{t\to \infty} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = d_a f(e_i)$$

Sendo $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$,

então,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a) \end{bmatrix}_{m\times 1} = d_a f(e_i)$$

VETOR COLUNA

Então, $$d_a f = [L]_{n\times m} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right]_{n\times m}$$

$$\begin{array}{ccc} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad & n\times 1 & n\times 1 \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial m} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & & & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & & & & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}_{n\times m} \quad (a)$$

chamada de <u>MATRIZ JACOBIANA</u> da f no ponto a.

<u>obs.:</u> para facilitar a notação, podemos escrever: $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$; $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$,

então

$$d_a f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{2m} \\ \vdots & & & & \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} & \cdots & f_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m}, \text{ onde}$$

$$f_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

Ou seja, o que expomos acima é a prova do seguinte teorema:

<u>TEOREMA:</u> Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $a \in \text{int}(\Omega)$.
Então, f é diferenciável em a se, e somente se, existir uma transformação $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear, tal que, a matriz dessa transf. nas bases canônicas for a matriz jacobiana acima definida, e for representação ÚNICA.(*)

<u>EX.:</u> $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $f(x, y, z) = (x^2 y + y^2 z, \text{sen}(xy))$

obter $d_a f$.

<u>SOLUÇÃO:</u> $\forall a \in \mathbb{R}^3$: ; $f_1 = x^2 y + y^2 z$
$f_2 = \text{sen}(xy)$

$$d_a f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 + 2yz & y^2 \\ y\cos(xy) & x\cos xy & 0 \end{bmatrix}$$

(*) a unicidade é garantida pela unicidade da representação de uma transf. linear em uma matriz, fixadas as bases.