CÁLCULO 3.

14/06/24 – AULA 12

Na aula passada iniciamos o estudo de derivadas parciais para funções $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Ex.: Sendo $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função. Definimos as derivadas de 2ª ordem de f por:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right); \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right);$$

DERIVADA SEGUNDA DA f, EM RELAÇÃO A x, PELA segunda vez.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right);$$

assumindo que cada derivada parcial exista.

Outras notações para derivação parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = D_x f = f_x = f_1 \, ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = D_y f = f_y = f_2 \, ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D_x^2 f = f_{xx} \, ; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = D_y^2 f = f_{yy} \, ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = D_{yx}^2 f = f_{yx} \, ; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D_{xy}^2 f = f_{xy}$$

EXEMPLO: $f(x,y) = x^2 y + \operatorname{sen}(x+y)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ? \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = ?$$

SOLUÇÃO:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$ Logo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \cos(x+y).(1+0) = 2xy + \cos(x+y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy + \cos(x+y)\right) = 2y - \operatorname{sen}(x+y).1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y - \operatorname{sen}(x+y)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = ?$$

$$f(x,y) = x^2 y + \operatorname{sen}(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \cos(x+y)$$

Então:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + \cos(x+y)\right)$$

$$= 2x - \operatorname{sen}(x+y) \cdot 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x - \operatorname{sen}(x+y)}$$

Ex.: Seja $\underset{z}{\underbrace{f(x,y)}} = \sqrt{25 - 5x^2 - 50y^2}$. Obtenha Domínio, imagem, gráfico do domínio, gráfico de f.

Verifique que

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = 10 \cdot \frac{y}{x}.$$

Solução: Fica como exercício obter domínio, imagem e os gráficos.

$$f(x,y) = (25 - 5x^2 - 50y^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (u^k)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$$

- $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot (25 - 5x^2 - 50y^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (-\overset{5}{\cancel{10}}x) = \frac{-5x}{\sqrt{25 - 5x^2 - 50y^2}}.$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot (25 - 5x^2 - 50y^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (-\overset{50}{\cancel{100}}y) = \frac{-50y}{\sqrt{25 - 5x^2 - 50y^2}}$$

Disso, obtemos:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\frac{-50\,y}{\sqrt{25-\cancel{5x^2}-50y^2}}}{\frac{-5\,x}{\sqrt{25-\cancel{5x^2}-50y^2}}} = +10\,\frac{y}{x}.$$

Questão: $f(x,y) = x^2 + xy^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = ? \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = ?$$

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y$$
- $$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x + y^2) = 2y$$

$=$

Neste caso, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, e isto não é uma simples coincidência; pois vale o seguinte resultado:

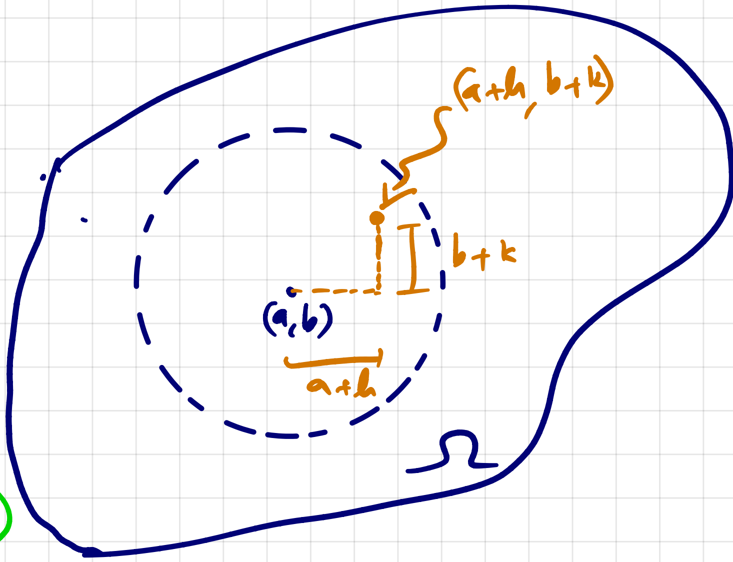
TEOREMA DE SCHWARZ: Seja $z = f(x,y)$ uma função de duas variáveis reais cujas derivadas parciais f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} sejam contínuas em uma bola aberta centrada em um ponto (a,b) e raio $\delta > 0$, ou seja, em $B_\delta(a,b)$. Então,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b).$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja f nas hipóteses do teorema;

Dado $(a,b) \in \text{int } D(f)$. Logo, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$B_\delta(a,b) \subset D(f)$.



Sejam $h, k \in \mathbb{R}$ tais que $(a+h, b+k) \in B_\delta(a,b)$

Defina g por

$$\boxed{g(x) = f(x, b+k) - f(x, b)} \quad (I)$$

entre a e $a+h$.

g é contínua e derivável, por hipótese.

Então, estamos nas hipóteses do T.V.M.(*)

Então, $\exists\, c_0$ entre a e $a+h$ tal que

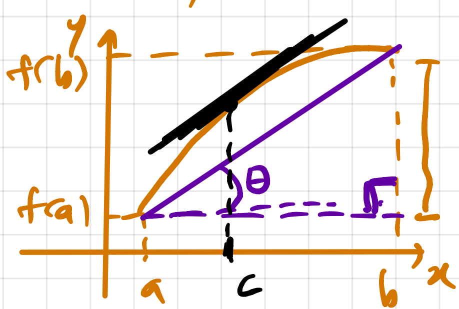
$$g'(c_0) = \frac{g(a+h) - g(a)}{\cancel{a} + h - \cancel{a}}$$

(NOTE QUE sendo $g(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$, então

$$g'(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, b+k) - \frac{\partial}{\partial x} f(x, b)$$

(*) T.V.M. Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função cont. em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Então, $\exists\, c \in [a,b]$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



$$\tan\theta = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

"

$f'(c)$

$$\Rightarrow \quad g(a+h) - g(a) = g'(c_0) \cdot h.$$

$$= h \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} f(c_0, b+k) - \frac{\partial}{\partial x} f(c_0, b) \right) \qquad (\text{II})$$

Define $u(y)$ por:

$$u(y) = \frac{\partial}{\partial x} f(c_0, y) \quad (*) \quad , \text{ entre } b \text{ e } b+k.$$

Então; como u é cont. e deriváveis, estamos, novamente, nas hipóteses do T.V.M.

Então, $\exists \; d_0$ entre b e $b+k$ tal que

$$u(b+k) - u(b) = u'(d_0) \cdot (\cancel{b} + k - \cancel{b})$$

$$\Rightarrow u(b+k) - u(b) = u'(d_0) \cdot k \underset{\text{por } (*)}{=}$$

$$= k \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(c_0, y) \right) \Bigg|_{y=d_0} = k \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(c_0, d_0)$$

Disso;

$$u(b+k) - u(b) = k \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(c_0, d_0)$$

Assim, (II) ficará:

$$g(a+h) - g(a) = h\left(\frac{\partial}{\partial x} f(c_0, b+k) - \frac{\partial}{\partial x} f(c_0, b)\right)$$

$$= h \cdot (u(b+k) - u(b))$$

$$= h \cdot k \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_0, d_0)$$

De acordo com (I):

$g(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$. Então:

$$\begin{cases} g(a+h) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) \\ g(a) = f(a, b+k) - f(a, b) \end{cases}.$$

Assim:

$$f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b) =$$

$$= g(a+h) - g(a) = h \cdot k \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(c_0, d_0)$$

Além disso, como c_0 está entre a e $a+h$ e d_0 está entre b e $b+k$, então existem $\theta_1, \theta_2 \in [0,1]$ tais que

$$\begin{cases} c_0 = a + \theta_1 h \\ d_0 = b + \theta_2 k . \end{cases}$$

Com isso, escrevemos:

$$f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b) =$$

$$= h.k. \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$$

Dividindo por $k \neq 0$, obtemos:

$$\frac{f(a+h, b+k) - f(a+h, b)}{k} - \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} =$$

$$= \frac{h.\cancel{k}}{\cancel{k}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$$

Tomando o limite com $k \to 0$, vamos encontrar:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a+h, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = h. \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(a+\theta_1 h, b)$$

Dividindo por $h \neq 0$:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a+h, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{h} = \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(a+\theta_1 h, b)$$

Tomando o limite com $h \to 0$, encontramos

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(a,b)\right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(a,b)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

$\square$

Então de fato, sendo contínuas as derivadas mistas, o T. de SCHWARZ garante que serão iguais.

Obs: Este resultado, e o cálculo de derivadas mistas se estende para mais variáveis e para derivações de ordem mais alta.

EX: $w = f(x,y,z)$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} f\right)\right), \text{ et cetera.}$$

Por exemplo: $f(x,y,z) = x^2 y z^3 - \operatorname{sen}(xyz)$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = ?$$

Solução:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2yz^2 - \cos(xyz).xy\right)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2z^2 - \left[\cos(xyz).x + \operatorname{sen}(xyz).(xz).xy\right]\right)$$

$(u.v)' = uv' + u'v$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2z^2 - x\cos(xyz) + x^2yz.\operatorname{sen}(xyz)\right)$$

$$= 6xz^2 - \left[x.(-\operatorname{sen}(xyz).yz + 1.\cos(xyz)\right] +$$

$$+ x^2yz.\cos(xyz).(yz) + 2xyz.\operatorname{sen}(xyz)$$

$$= 6xz^2 + \underline{xyz\operatorname{sen}(xyz)} - \cos(xyz) + x^2y^2z^2\cos(xyz) +$$

$$+ \underline{2xyz\operatorname{sen}(xyz)}$$

$$= 6xz^2 + 3xyz\operatorname{sen}(xyz) + \cos(xyz).\left[-1 + x^2y^2z^2\right]$$