CÁLCULO 3

12/06/24 – AULA 11

Seguindo a revisão, estudamos o conceito de continuidade:

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua em $a \in \Omega$ se, e só se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que, $\forall x \in \Omega$: $d_{\mathbb{R}^m}(x, a) < \delta \Rightarrow d_{\mathbb{R}^n}(f(x), f(a)) < \varepsilon$

Quando $a \in \Omega \cap \Omega'$ (i.e., $a \in \Omega$ também for um ponto de acumulação de Ω), então o conceito de continuidade em um ponto torna-se um cálculo de limite; ou seja f será contínua em $a \in \Omega$ se, e somente se,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Relembrando, fizemos também um estudo de derivadas de funções vetoriais de uma variável real: i.e., dada $\vec{f}: [a,b] \to \mathbb{R}^m$;

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t));$$

então, vimos que

$$\vec{f}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h},$$

se este limite existir.

Mostramos que; dada $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))$

então:

$$\vec{f}\,'(t) = (\vec{f}_1\,'(t), \vec{f}_2\,'(t), \dots, \vec{f}_m\,'(t))$$

Ex.: $\vec{f}(t) = (\ln t^2, \sqrt{t}, \operatorname{sen} t)$; então:

$$\vec{f}\,'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)) \; ; \; \text{i.e.:}$$

- $f_1(t) = \ln t^2 \Rightarrow f_1'(t) = \dfrac{2\cancel{t}}{t^{\cancel{2}}} = \dfrac{2}{t}$

$$(\ln r)' = \frac{r'}{r}$$

- $f_2(t) = t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f_2'(t) = \dfrac{1}{2} \cdot t^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

$$(r^k)' = k \cdot r^{k-1} \cdot r'$$

- $f_3(t) = \operatorname{sen} t \Rightarrow f_3'(t) = \cos t \cdot 1 = \cos t$

$$(\operatorname{sen} r)' = \cos r \cdot r'$$

Portanto, obtemos:

$$\vec{f}\,'(t) = \left(\frac{2}{t}, \frac{1}{2\sqrt{t}}, \cos t\right)$$

Lembre-se também que, vimos que em um ponto $t_0 \in \mathbb{R}$, $\vec{f}\,'(t_0)$ corresponde, geometricamente, ao vetor tangente à curva dada por $\vec{f}(t)$ no ponto t_0.

EX.: LISTA 02: 02 - a)

2. Em cada item a seguir, encontrar o vetor tangente unitário para a curva dada no instante t apresentado.

(a) $\vec{f}(t) = (t+1)\vec{i} - t^2\vec{j} + (1-2t)\vec{k}$, em $t = 1$.

Solução: O vetor tangente em $t=1$ será dado por $\vec{f}\,'(1)$. O vetor tangente unitário será definido por

$$\vec{u} = \frac{\vec{f}\,'(1)}{\|\vec{f}\,'(1)\|}.$$

$$\vec{f}(t) = (t+1, -t^2, 1-2t)$$

$$\Rightarrow \vec{f}\,'(t) = (1, -2t, -2)$$

$$\Rightarrow \vec{f}\,'(1) = (1, -2\cdot(1), -2) = (1, -2, -2)$$

Logo: $\|\vec{f}\,'(1)\| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2}$

$$= \sqrt{1+4+4} = 3$$

Portanto, o vetor unitário $\vec{u}$ será:

$$\vec{u} = \frac{\vec{f}\,'(1)}{\|\vec{f}\,'(1)\|} = \frac{1}{3}\cdot(1, -2, -2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

PROP.: Dados $\vec{f}, \vec{g} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ funções vetoriais deriváveis.

Então; valem as propriedades:

(01) $(\vec{f} + \vec{g})' = \vec{f}' + \vec{g}'$

(02) $(\vec{f} - \vec{g})' = \vec{f}' - \vec{g}'$

(03) $(\vec{f} \cdot \vec{g})' = \vec{f} \cdot \vec{g}' + \vec{f}' \cdot g$ [PRODUTO ESCALAR]

(04) $(\vec{f} \times \vec{g})' = \vec{f} \times \vec{g}' + \vec{f}' \times \vec{g}$

DEMONSTR.: Provaremos 04.

Sejam $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$

$\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$ funções vetoriais.

Então:

$$\vec{f} \times \vec{g} = \left| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{matrix}$$

$$= f_2 g_3 \vec{i} + f_3 \cdot g_1 \vec{j} + f_1 \cdot g_2 \vec{k} - f_2 g_1 \vec{k} - f_3 g_2 \vec{i} - f_1 g_3 \vec{j}$$

$$= (f_2 g_3 - f_3 g_2 \,,\, f_3 g_1 - f_1 \cdot g_3 \,,\, f_1 \cdot g_2 - f_2 \cdot g_1)$$

$$\left[(u\cdot v)' = u\cdot v' + u'\cdot v\right]$$

Amim;

$$(\vec f \times \vec g)' = \left(f_2\cdot g_3' + g_3\cdot f_2' - f_3\cdot g_2' - g_2 f_3',\; f_3\cdot g_1' + f_3' g_1 - f_1\cdot g_3' - f_1' g_3,\; f_1\cdot g_2' + f_1' g_2 - f_2\cdot g_1' - f_2' g_1 \right)$$

$$= \left(f_2\cdot g_3' - f_3 g_2',\; f_3 g_1' - f_1\cdot g_3',\; f_1\cdot g_2' - f_2 g_1' \right) +$$

$$+ \left(f_2'\cdot g_3 - f_3' g_2,\; f_3' g_1 - f_1' g_3,\; f_1' g_2 - f_2' g_1 \right)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1' & g_2' & g_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = \vec f \times \vec g\,' + \vec f\,' \times \vec g$$

$\square$

DERIVADAS PARCIAIS:

Def: Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função escalar.

Definimos a derivada parcial de f em relação à variável x_i (onde $x = (x_1, \ldots, x_m)$) por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_m) - f(x_1, \ldots, x_m)}{h},$$

se este limite existir.

O símbolo ∂ da derivação parcial é lido como "D-ROND."

No caso de $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $z = f(x, y)$.

Então, temos:

- $$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad ; \quad \text{e}$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Ou seja, no cálculo de uma derivação parcial, estamos, na verdade, estamos derivando a função em apenas uma variável (por isso a expressão "derivada parcial"), e as demais variáveis ficam fixadas, como se fossem constantes.

Ex.: Seja $f(x,y) = xy^2 - \sqrt{x}$.

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$:

(i) pela definição;

(ii) pelas regras de derivação.

SOLUÇÃO:

(i) $$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)\cdot y^2 - \sqrt{x+\Delta x} - [xy^2 - \sqrt{x}]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{xy^2} + \Delta x\cdot y^2 - \cancel{xy^2}}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}\cdot y^2}{\cancel{\Delta x}} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} y^2 - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= y^2 - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x} + \Delta x - \cancel{x}}{\Delta x \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= y^2 - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= y^2 - \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = y^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Pelas regras de derivações:

$$f(x,y) = xy^2 - \sqrt{x} = xy^2 - x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = y^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Do mesmo modo:

$$f(x,y) = xy^2 - \sqrt{x}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ? \quad :$$

Pela definição:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x \cdot (y+\Delta y)^2 - \sqrt{x} - (xy^2 - \sqrt{x})}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x \cdot (y^2 + 2y \cdot \Delta y + \Delta y^2) - \cancel{\sqrt{x}} - xy^2 + \cancel{\sqrt{x}}}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\cancel{xy^2} + 2xy \cdot \Delta y + x \cdot \Delta y^2 - \cancel{xy^2}}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2xy \cdot \Delta y + x \cdot \Delta y^2}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\cancel{\Delta y}(2xy + x\Delta y)}{\cancel{\Delta y}}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} 2xy + \underbrace{x \cdot \Delta y}_{\to 0} = 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$$

Pelas regras de derivação: $f(x,y) = xy^2 - \sqrt{x}$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot (2y) + 0 = 2xy .$$

Isso se estende para mais variáveis:

$$w = f(x, y, z).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \ ; \ \frac{\partial f}{\partial y} \ ; \ \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Ex.: $\quad f(x,y,z) = e^{x^2y+yz} - \ln xyz.$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ? \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = ? \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = ?$$

Solução: $\qquad (e^u)' = e^u \cdot u' \ ; \ (\ln u)' = \frac{u'}{u}$

- $$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2y+yz} \cdot (2xy+0) - \frac{\cancel{yz}}{x\cancel{yz}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \cdot e^{x^2y+yz} - \frac{1}{x}.$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2y+yz} \cdot (x^2+z) - \frac{\cancel{x}\cancel{z}}{\cancel{x}y\cancel{z}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = (x^2+z) \cdot e^{x^2y+yz} - \frac{1}{y}.$$

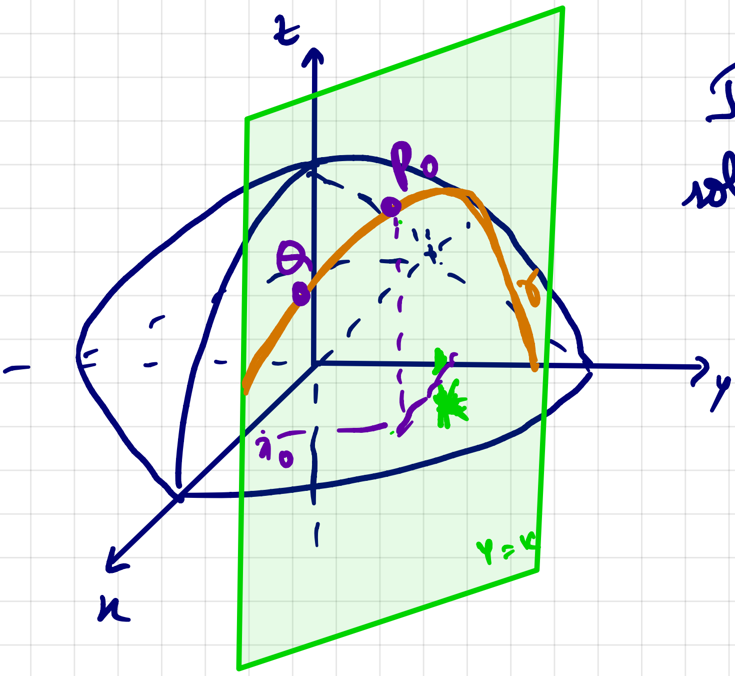
- $$\frac{\partial f}{\partial z} = e^{x^2y+yz} \cdot (y) - \frac{\cancel{xy}}{\cancel{xy}z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = y \cdot e^{x^2y+yz} - \frac{1}{z}.$$

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DA DERIVADA PARCIAL:

Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais. Seja fixado $y = k$. Ou seja, um plano paralelo ao plano xz.

Considere a curva γ formada pelo intercepto do plano $y = k$ com o gráfico de f: $z = f(x, y)$.



Tome o ponto $P_0(x_0, k, f(x_0, k))$ sobre $\gamma \cap f$.

tome $\Delta x \in \mathbb{R}$ e considere o ponto

$Q(x_0 + \Delta x, k, f(x_0 + \Delta x, k))$

Então, $f(x, k)$ é vista como uma função de uma variável real.

Então

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, k) - f(x, k)}{\Delta x};$$

i.e., $Q \to P$, e então, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva γ no ponto P_0.