CÁLCULO 3

10/06/24 – AULA 10

Retomada das atividades (após suspensão das aulas, após alagamentos no RS)

Nesta aula faremos revisão de assuntos já estudados.

Até o momento vimos conceitos de:

- TOPOLOGIA (métrica; espaço métrico; bolas abertas; abertos, fechados, fronteira, etc.);
- funções $\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$;
- limite e continuidade dessas funções;
- derivadas de funções vetoriais $\mathbb{R} \xrightarrow{\vec{F}} \mathbb{R}^m$.

O estudo da Topologia é fundamental para entender conceitos de limite e continuidade.

$M \neq \emptyset$ um conj. $\quad d : M \times M \to [0, +\infty)$

será uma MÉTRICA no conj. M se, e só se;

(distância)

$\forall\, x, y, z \in M$, tivermos:

(i) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \iff x = y$;

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$;

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

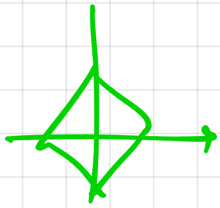
(M,d) chama-se um espaço métrico.

Em um espaço métrico M, existe o importante conceito de bola: dado $R>0$, define-se a BOLA aberta em $a \in M$ e raio R como:

$$B_R(a) = \{ x \in M : d(x,a) < R \}.$$

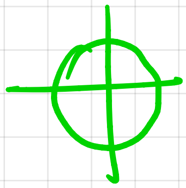
Em $M = \mathbb{R}^m$, as métricas que podemos usar são:

- $d_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to [0, +\infty)$:



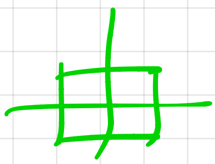
$$d_1((x_1, \dots, x_m); (y_1, \dots, y_m)) =$$
$$= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_m - y_m|$$

- $d_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to [0, +\infty)$



$$d_2((x_1, \dots, x_m); (y_1, \dots, y_m)) =$$
$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2}$$

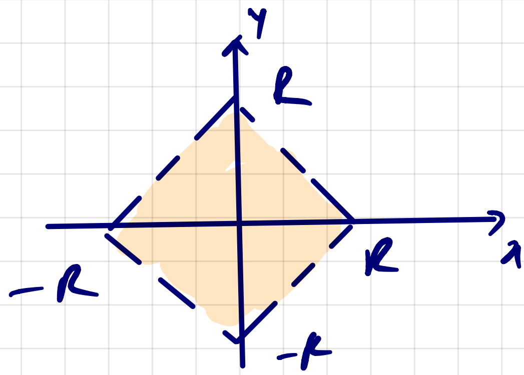
- $d_\infty : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to [0, +\infty)$



$$d_\infty((x_1, \dots, x_m); (y_1, \dots, y_m)) =$$
$$= \text{máx.}\{ |x_1 - y_1|; |x_2 - y_2|; \dots, |x_m - y_m| \}.$$

Ex: $M = \mathbb{R}^2$; $d = d_1$; $a(0,0)$

$$B_R(a) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : d_1((x,y),(0,0)) < R\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x-0|+|y-0| < R\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y| < R\}.$$



Uma função $f:\Omega\subset\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma regra

$$(x_1,x_2,\dots,x_m) \xmapsto{f} (y_1,y_2,\dots,y_n),$$

onde

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1,x_2,\dots,x_m)\\ y_2 &= f_2(x_1,x_2,\dots,x_m)\\ &\vdots\\ y_n &= f_n(x_1,x_2,\dots,x_m)\end{aligned}\right\}\ \text{FUNÇÕES COORDENADAS DA } f.$$

Ex: $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$;

$$f(x,y,z) = (x^2\operatorname{sen}(y+z),\ xz-2y)$$

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x,y,z) = x^2 \operatorname{sen}(x+y) \\ f_2(x,y,z) = xz - 2y \end{array}\right\} \text{funções coord. da } f.$$

01) Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \ln(xy)$.

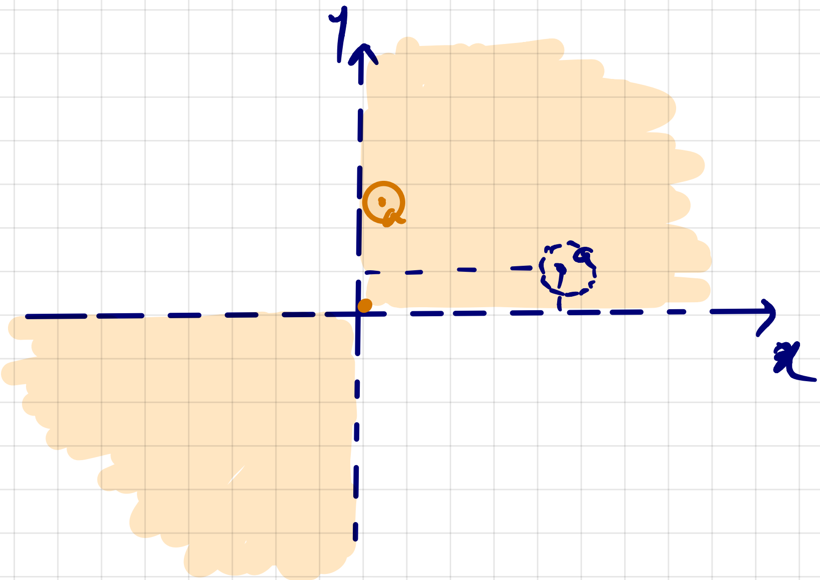
Domínio de f? Gráfico do domínio?

(onde f tem sentido real)

condições de existência: $\exists \ln a \iff a > 0$

Neste caso: $x \cdot y > 0$

$$\Omega = D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y > 0\}$$



Ω é um aberto do $\mathbb{R}^2$, pois todo ponto de Ω é interior a Ω, ou seja, $\forall a \in \Omega$, $\exists \varepsilon > 0$ tal que

$B_\varepsilon(a) \subset \Omega$. De fato, tome

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{ D(a; OX), D(a; OY) \},$$

onde $D(a, OX)$ é a dist. do ponto a ao eixo OX e $D(a, OY)$ é a dist. do ponto a ao eixo OY.

c2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $f(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$.

$D(f) = ?$ gráfico do domínio?

cond. de existência: $1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

$$D(f) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}.$$

esfera centrada na origem e raio unitário.

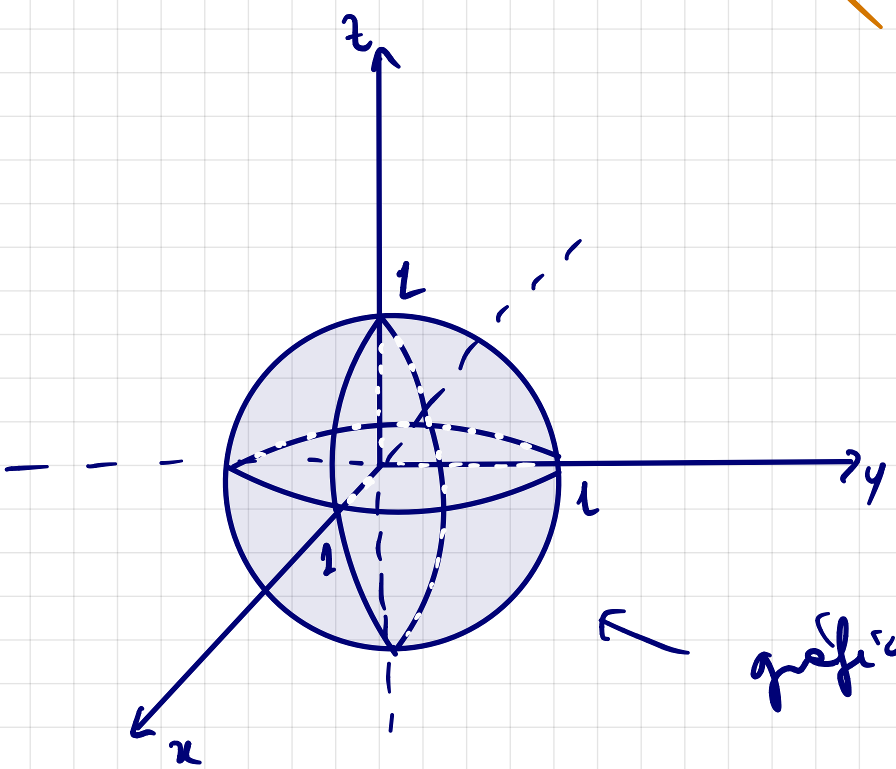


gráfico do domínio.

$D(f) = \Omega$ é um fechado de $\mathbb{R}^3$, pois

$\overline{\Omega} = \Omega$. De fato, lembre que

$a \in \mathbb{R}^3$ será um ponto aderente de Ω se

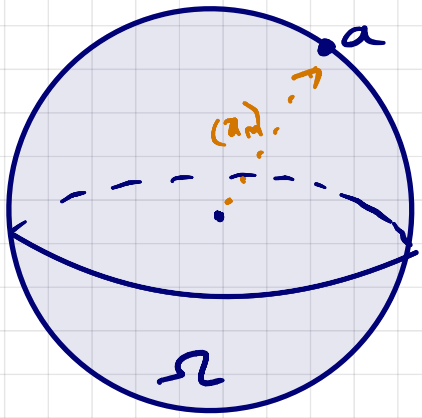
$\exists\, (x_n) \subset \Omega$ tal que $x_n \to a$.

Seja $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1,$$

ou seja, $a \in \partial\Omega$.

Então, podemos tomar uma seq. $(x_n) \subset \Omega$ tal que $x_n \to a$; e $a \in \Omega$. Logo, Ω é fechado, pela arbitrariedade da escolha de $a \in \partial\Omega$.



03) $\vec{f} : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(t) = (t+1, \ln(t), 2)$.

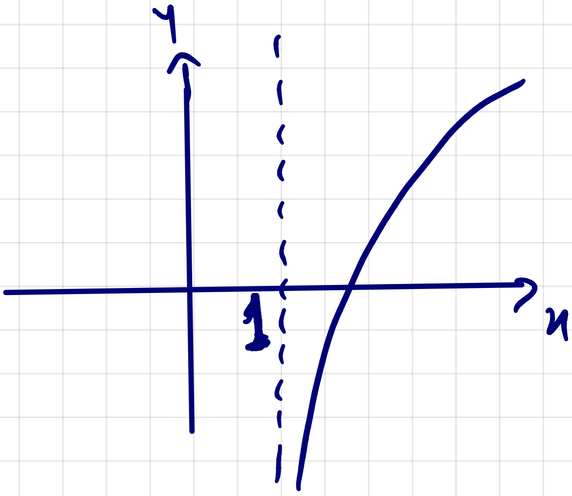
$D(f) = ?$ condições de existência:

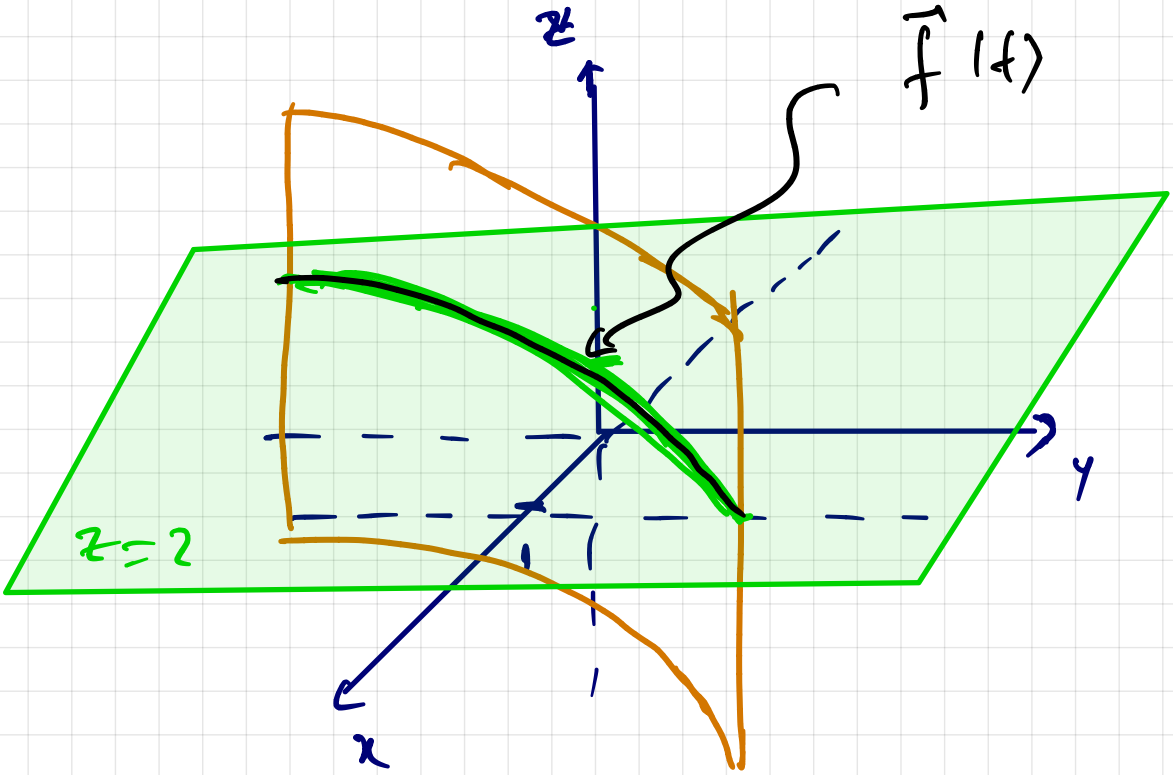
- $t + 1 \in \mathbb{R}$;
- $t > 0$.
- $2 \in \mathbb{R}$.

$D(f) = (0, +\infty)$

gráfico de $\vec{f}$: $\begin{cases} x = t+1 \\ y = \ln t \\ z = 2 \end{cases}$ $\longrightarrow$ $t = x - 1$

$y = \ln(x-1)$





Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função;

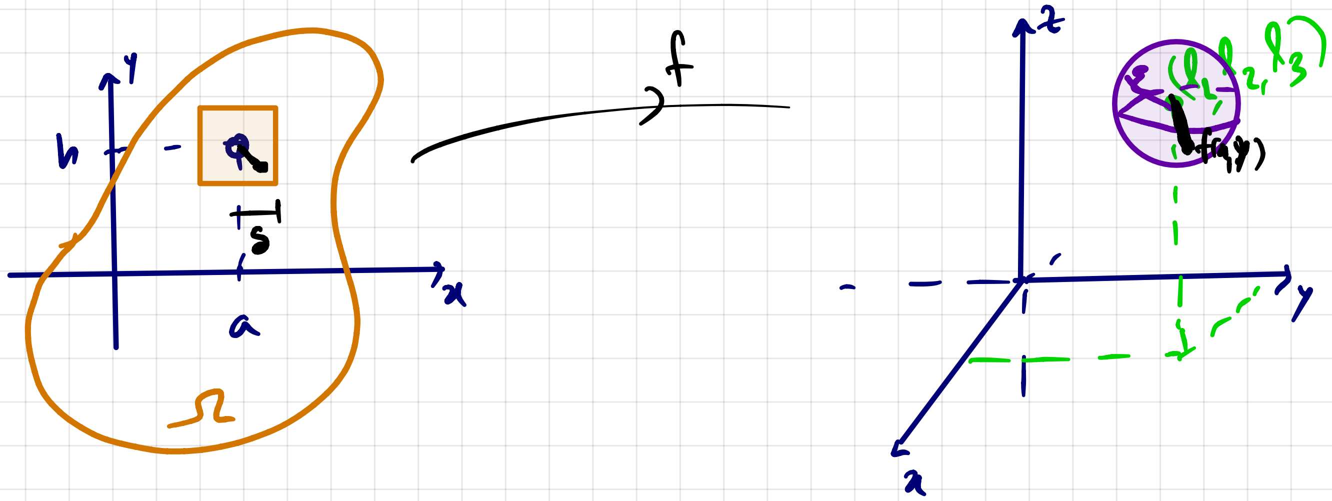
$a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação(*) do conj. Ω.

Dizemos que $\ell \in \mathbb{R}^n$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a, e escrevemos $\ell = \lim_{x \to a} f(x)$,

se, e somente se,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, } \forall x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(\ell).$$

Ex.: $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$.



Vimos o resultado de que, se por caminhos diferentes, tivermos resultados de limite diferentes, então,

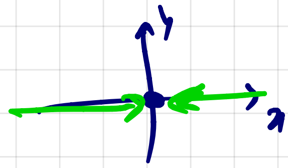
$$\nexists \lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y).$$

(*) $a \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ é ponto de acumulação de Ω se, e só se, $\exists\, r > 0$ tal que $(B_r(a) \setminus \{a\}) \cap \Omega \neq \emptyset$.

Ex.: Verifique se $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y^2}{x^3+y^3}$.

• $A_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}$.

↑ eixo x.

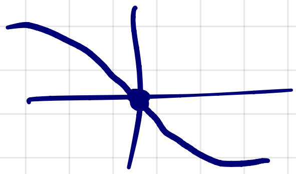


$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x+0^2}{x^3+0^3} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{3}}}$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

logo, $\nexists$ o limite.

• $A_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y^3\}$



$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^3}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^3}} \frac{y^3+y^2}{y^6+y^3} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^3}} \frac{\cancel{y^2}(y+1)}{y^{\cancel{3}}(y^3+1)} =$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^3}} \frac{y+1}{y^4+y} = +\infty.$$

02) LISTA 03 :

5. Em cada exercício a seguir, mostre que existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (c) $f(x,y) = \dfrac{x^2+2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(c)

Se tentarmos por caminhos diferentes, encontraremos sempre o mesmo limite, o que sugere que o limite deve existir. Faremos apenas um para constar:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2+0}{\sqrt{x^2+0^2}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2}{|x|} =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2}{\cancel{x}}, & \text{se } x \geq 0 \\ \displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2}{-x}, & \text{se } x < 0 \end{cases} = 0$$

Por outro caminho qualquer vamos obter 0. Então, conjecturemos:

AF: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos achar $\delta > 0$ tal que,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2: \quad 0 < d_2((x,y),(0,0)) < \delta \implies |f(x,y) - 0| < \varepsilon.$$

$$\Updownarrow$$

$$0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta$$

$$\Updownarrow$$

$$0 < \underbrace{\sqrt{x^2+y^2} < \delta}$$

Analisando $|f(x,y) - 0|$:

$$|f(x,y)-0| = |f(x,y)| = \left| \frac{x^2+2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{|x^2| + |2xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{|x|^2 + 2|x|\cdot|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Note que: $\begin{cases} |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \\ |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$. Disso:

$$|f(x,y)-0| \leq \frac{|x|^2 + 2|x|.|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + 2\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\sqrt{x^2+y^2} + 2.\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$$= 3.\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{<\delta} < 3\delta := \varepsilon$$

$\hookrightarrow$ ou seja, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

Portanto, $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$