CÁLCULO 1, T2

27/06/24 – AULA 06

Obs.: MONITORIA DO GAMA. (3º ANDAR)

AUGUSTO.: segundas, terças e quartas
13h → 17h.

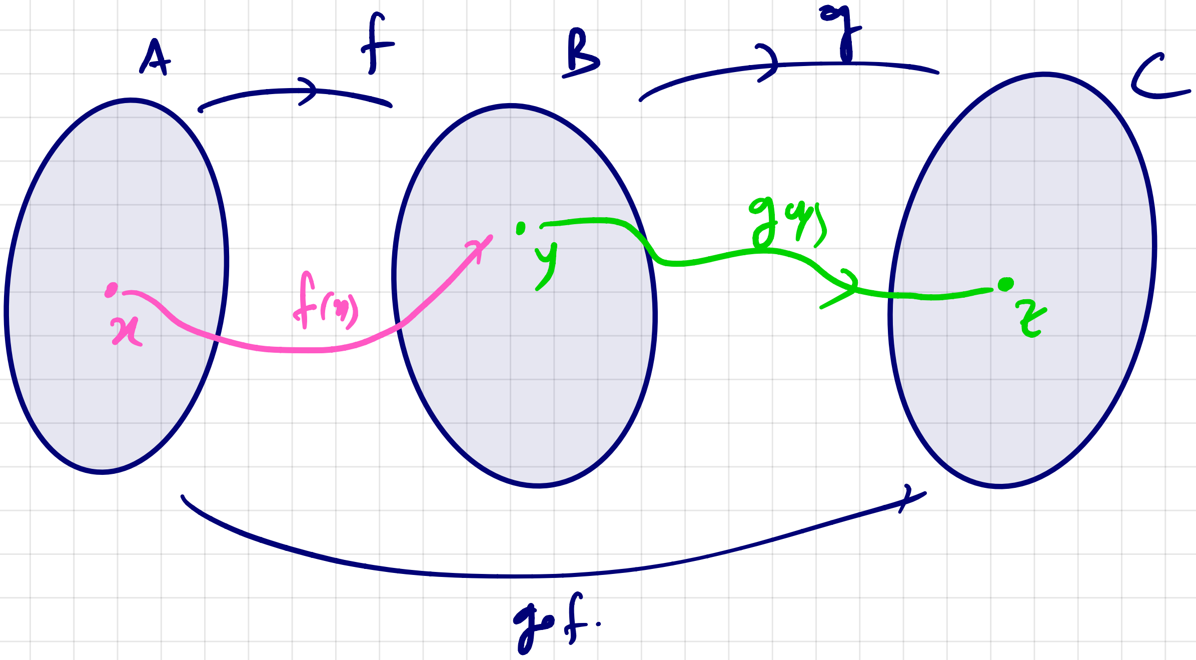
No final da aula passada, no estudo de composição de funções, mostramos que composição de funções injetivas resulta em uma função injetiva, ou seja, sendo

$f: A \to B$ e $g: B \to C$ injetivas, então

$g \circ f: A \to C$ também é injetiva.

Continuando a demonstração da PROPOSIÇÃO do final da aula anterior; mostremos a AFIRMAÇÃO:

AF: Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ forem sobrejetivas, então $g \circ f: A \to C$ também será sobrejetiva.



Como g é sobrejetiva, então, $\forall z \in C$, segue que

$\exists\, y \in B$ tal que $g(y) = z$.

E, como $f: A \to B$ também é sobrejetiva, segue que, para o $y \in B$ destacado, $\exists\, x \in A$ tal que

$f(x) = y$.

Ou seja, $\forall z \in C$, obtemos $x \in A$ tal que

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Ou seja, $g \circ f: A \to C$ é sobrejetiva.

Por fim, se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ forem bijetivas, em particular são:

- injetivas e, portanto, sua composição será injetiva.
- sobrejetivas, e, portanto, sua composição será sobrejetiva.

Portanto, segue a bijetividade da composição

$\square$

TIPOS DE FUNÇÕES:

01) **FUNÇÃO AFIM:** É a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Se $b = 0$, então $f(x) = ax$ é chamada de função linear.

Se $a = 0$, então $f(x) = b$, é chamada de função constante.

Ex: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 2x + 1$. (FUNÇÃO AFIM)

PROPOSIÇÃO: A função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ é crescente se, e somente se $a > 0$ e decrescente se, e somente se, $a < 0$.

DEMONSTR.: Suponha $f(x) = ax + b$ crescente.

A mostrar: $a > 0$.

De fato; sendo crescente, então; $p < q$

$\Rightarrow f(p) < f(q)$. Disso:

$$a \cdot p + \cancel{b} < a \cdot q + \cancel{b}$$

$$\Rightarrow ap < a \cdot q \Rightarrow ap - aq < 0$$

$$\Rightarrow a \cdot (p - q) < 0$$

Como $p < q$, então $p - q < 0$, e disso segue que

$$\underbrace{a}_{>0} \cdot \underbrace{(p-q)}_{<0} < 0 \implies a > 0.$$

Reciprocamente, suponha que $a > 0$.
A mostrar: $f(x) = ax + b$ é crescente.
Dados $s, t \in \mathbb{R}$; $s < t$, precisamos mostrar que $f(s) < f(t)$.

$$s < t \underset{\text{pois } a>0}{\implies} a \cdot s < a \cdot t \underset{+b}{\implies} \underbrace{a \cdot s + b}_{= f(s)} < \underbrace{a \cdot t + b}_{= f(t)}$$

$$\implies f(s) < f(t)$$; ou seja, f é cresc.

Ou seja, provamos que

$$f(x) = ax + b \text{ é crescente} \iff a > 0$$

Analogamente se mostra que

$$f(x) = ax + b \text{ é decrescente} \iff a < 0.$$

$\square$

PROPOSIÇÃO: O gráfico de uma função afim é uma linha reta.

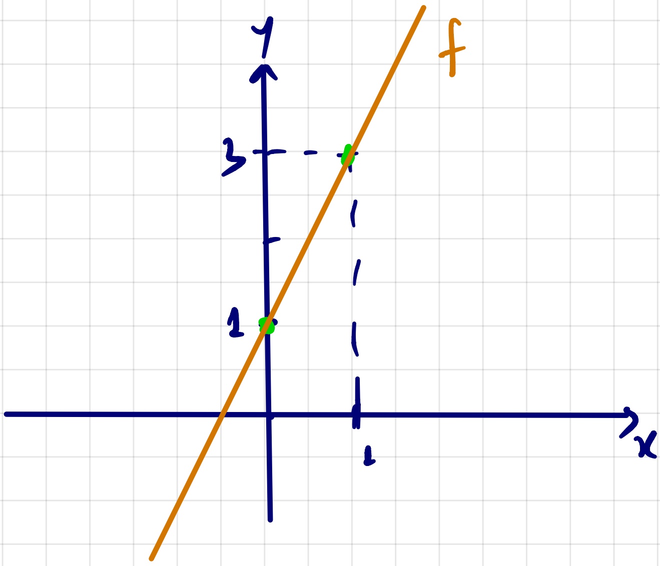
DEMONSTR.: Basta tomar três pontos quaisquer
$(a, f(a))$; $(b, f(b))$ e $(c, f(c))$
sobre o gráfico de f e mostrar que eles estão alinhados. Fica como exercício. (veja AULA 05 da turma 1) $\square$

EX: 01) Esboce o gráfico de $f(x) = 2x + 1$.

SOLUÇÃO: note que f é crescente, pois $a = 2 > 0$.

Como por 2 pontos distintos só passa uma reta, podemos esboçar o seu gráfico com 2 pontos apenas:

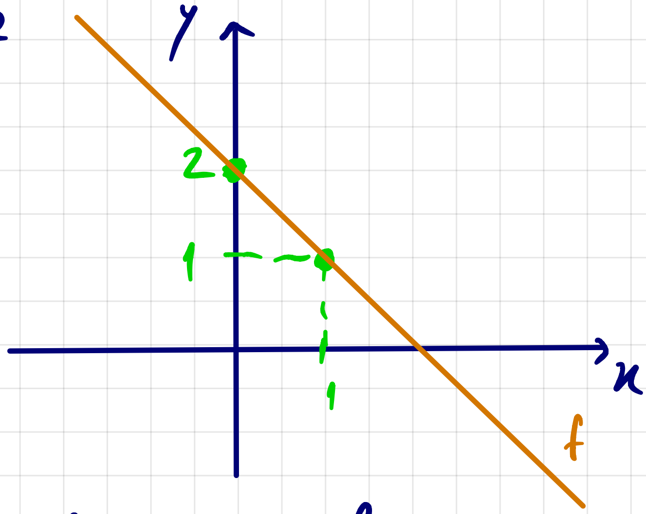
x	$y = 2x+1$
0	1
1	3



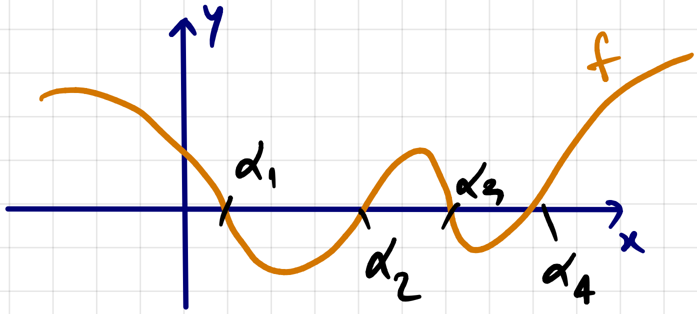
02) Idem para $f(x) = -x + 2$.

SOLUÇÃO: Neste caso, temos $a = -1 < 0$, logo f é decrescente.

x	$y=-x+2$
0	+2
1	1



Def.: Dada $f: A \to B$ uma função qualquer. Dizemos que $\alpha \in \mathbb{R}$ é um zero da função se $f(\alpha)=0$. Ou seja, os zeros de uma função são onde o gráfico de f intercepta o eixo horizontal.



Nesta ilustração α_1, α_2, α_3 e α_4 são zeros de f pois $f(\alpha_1)=0$; $f(\alpha_2)=0$; $f(\alpha_3)=0$; $f(\alpha_4)=0$.

Os zeros de uma função f são as raízes da equação $f(x)=0$.

Neste caso, os zeros de uma função afim $f(x)=ax+b$, são os valores $x \in \mathbb{R}$ tais que $f(x)=0$, ou seja:

$$ax+b=0 \Rightarrow ax=-b \Rightarrow \boxed{x=-\frac{b}{a}}$$

Voltando ao 1º exemplo, $f(x)=2x+1$, seu zero é:

$$2x+1=0 \Leftrightarrow 2x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

02) <u>FUNÇÃO QUADRÁTICA</u>: É a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=ax^2+bx+c \quad ; \quad \text{com } a\neq 0,$$

também chamada de função polinomial do 2º grau.

zero: onde $f(x)=0$; ou seja:

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \div(a\neq 0)$$

$$\underbrace{a}_{\neq 0}\cdot\left(\underbrace{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}_{=0}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

[VAMOS COMPLETAR UM QUADRADO PERFEITO]

$$(x+m)^2=x^2+2xm+m^2$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x+m)^2+K$$

$$=x^2+2mx+m^2+K$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m=\frac{b}{a} \Rightarrow m=\frac{b}{2a} \\ m^2+K=\frac{c}{a} \Rightarrow K=\frac{c}{a}-m^2=\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}$$

Portanto:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \iff$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

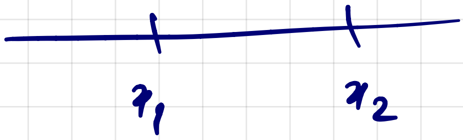
$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \text{ou} \\[2ex] x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

(FÓRMULA DE BÁSCARA)



Def.: Chama-se VÉRTICE o ponto médio das raízes da eq. polinomial de 2.º grau.

O vértice $V(x_V, y_V)$ é tal que

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \quad y_V = f(x_V) \; ;$$

ou seja:

$$x_V = \frac{\dfrac{-b + \cancel{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{2a} + \dfrac{-b - \cancel{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{2a}}{2} =$$

$$= \frac{-\dfrac{2b}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a} \; ;$$

e:

$$y_V = f(x_V) = a \cdot x_V^2 + b \cdot x_V + c$$

$$= a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$= \cancel{a} \cdot \frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} =$$

Onde $\Delta = b^2 - 4ac$. Assim,

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Portanto, as coordenadas do vértice da função quadrática são:

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

O gráfico da função quadrática chama-se PARÁBOLA.

Quando $a > 0$ a parábola possuirá concavidade voltada para cima (C.P.C) e se $a < 0$ a sua concavidade será voltada para baixo (C.P.B) (isto será justificado no estudo de derivadas)

Esboço gráfico: caso simples: $f(x) = ax^2$, com $a > 0$ (concavidade para cima)

zeros: $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 0$

vértice: $x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-0}{2a} = 0$

$y_v = f(x_v) = f(0) = a(0)^2 = 0$

Logo $V(0,0)$ (a origem do $\mathbb{R}^2$)

Além disso, $f(x) = ax^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Como $a > 0$, então: se $0 \leq p < q$;

então $p^2 < q^2 \Rightarrow a \cdot p^2 < a \cdot q^2 \Rightarrow f(p) < f(q)$

i.e, f é crescente em $[0, +\infty)$

E, se $p < q < 0 \Rightarrow -p > -q > 0$

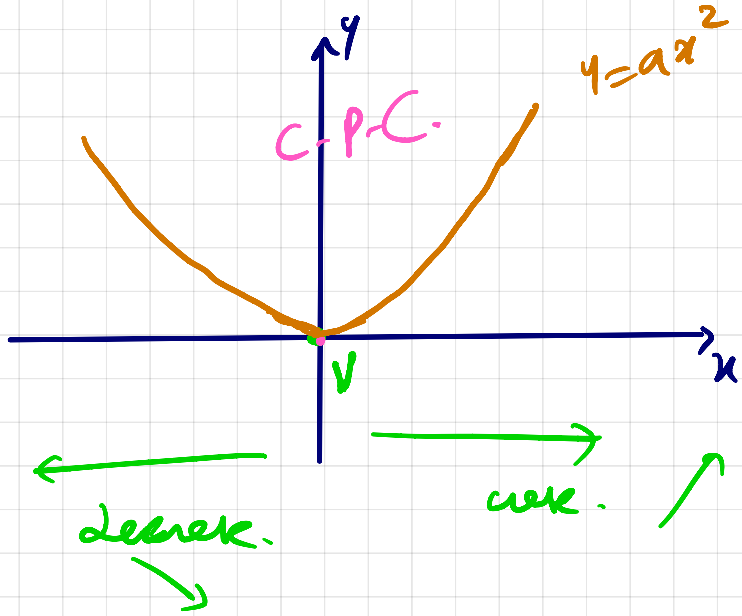
$$\Rightarrow (-p)^2 > (-q)^2$$

$$\Rightarrow p^2 > q^2$$

$$\Rightarrow ap^2 > aq^2 \Rightarrow f(p) > f(q)$$

ou seja, f é decrescente em $(-\infty, 0)$.

CONCLUSÃO:



O esboço gráfico do caso geral: $y = ax^2 + bx + c$, será estudado na próxima aula.