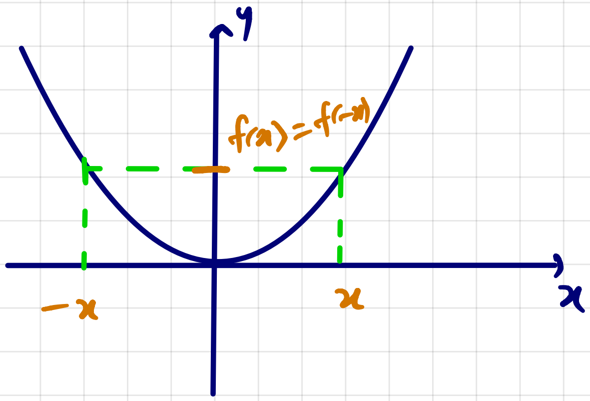
CÁLCULO 1, T2: 25/06/24 – AULA 05

Na aula passada iniciamos o estudo de funções.

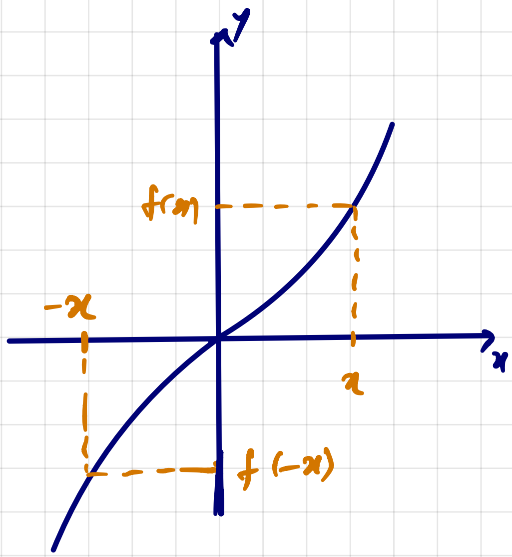
**Def:** Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $f$ é uma função par se, e só se, $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = f(-x)$.
Dizemos que $f$ é ímpar se, e só se, $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$f(x) = -f(-x).$$

Geometricamente, uma função par é simétrica em relação ao eixo vertical e uma função ímpar em relação à origem:




FUNÇÃO PAR.




FUNÇÃO ÍMPAR.

**Ex.:** • $f(x) = x^2$ é par pois

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

• $g(x) = x^5$ é ímpar pois

$$f(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = -f(-x)$$

• $h(x) = x^3 + 1$. $h$ não é nem par e nem ímpar, pois, por exemplo:

$$h(1) = (1)^3 + 1 = 2$$

$$h(-1) = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad h(1) \neq h(-1) \quad e \quad h(1) \neq -h(-1)$$

<u>OPERAÇÕES COM FUNÇÕES:</u> Sejam $f, g : A \to B$ funções. Definimos, de forma natural, as operações:

- $f+g : A \to B$ : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- $f-g : A \to B$ : $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- $f \cdot g : A \to B$ : $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $f/g : \tilde{A} \to B$ : $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, onde

$$\tilde{A} = A \setminus \{x \in A : g(x) = 0\}.$$

<u>EX:</u> $f(x) = x^2 - 3x + \dfrac{1}{x}$ ; $g(x) = x + x^3 + 3$

Então $f+g$ é dada por:

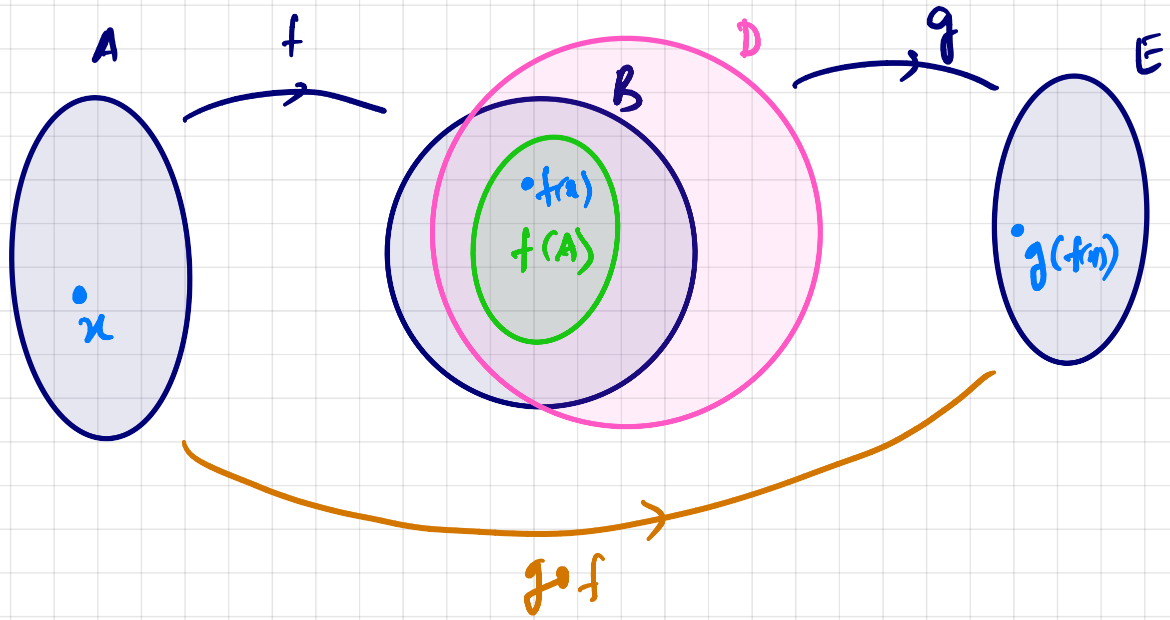
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 \underline{-3x} + \frac{1}{x} \underline{+x} + x^3 + 3$$

$$= x^3 + x^2 - 2x + 3 + \frac{1}{x}.$$

# COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES:

**Def.:** Sejam $f: A \to B$; $g: D \to E$ funções, com $f(A) \subset D$, definimos a composta $g \circ f : A \to E$ por:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$




**Ex.:** $f: (-\infty, 1] \to [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{1-x}$,

$g: (-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Observe que $Im(f) = [0, +\infty)$. Logo,

como $Im(f) = f((-\infty, 1]) = [0, +\infty) \subset (-1, +\infty)$,

então, existe $g \circ f : (-\infty, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, e é tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{1-x}) = \frac{1}{(\sqrt{1-x})^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{1-x+1} = \frac{1}{2-x}$$

Ou seja, encontramos $g \circ f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$,

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{2-x}.$$

L1:

4. Sejam $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, $g : \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{2}\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dadas respectivamente por

$$f(x) = -\frac{1+x}{2}; \quad g(x) = 2x - 5 \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{1}{x}.$$

Justifique por que é possível montar a composição $u = f \circ h \circ g$. Em seguida, determine a função $u : A \to B$ exibindo quem é o domínio $A$ e quem é o contradomínio $B$.

O esquema a seguir mostra que é possível montar a composição desejada:

$$\begin{array}{c} \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{2}\} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{h} \mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \\ u =: f \circ h \circ g \end{array}$$

Assim, $\exists$ $u = f \circ h \circ g : \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{2}\} \to \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$.

$$u(x) = (f \circ h \circ g)(x) = f \circ (h \circ g)(x) =$$

$$= f(h(g(x))) = f(h(2x-5)) =$$

$$= f\left(\frac{1}{2x-5}\right) = -\frac{1 + \frac{1}{2x-5}}{2} = -\frac{\frac{2x-5+1}{2x-5}}{2}$$

$$= -\frac{2x-4}{2x-5} \times \frac{1}{2} = -\frac{\cancel{2}(x-2)}{(2x-5)\cdot\cancel{2}}$$

$$= \frac{2-x}{2x-5}$$

**Obs.:** A composição de funções não é comutativa.

Ou seja, em geral, tem-se que $f\circ g \neq g\circ f$.

Aliás, há casos em que, tem-se $g\circ f$ e $f\circ g$ sequer existe.

**Ex.:** $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f(x) = x^2$; $g(x) = x+1$.

Neste caso:

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2+1.$$

$\neq$

e

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2+2x+1.$$

**PROPOSIÇÃO:** A composição entre funções é associativa.

**DEMONSTR.:** Sejam $f: A\to B$, $g: D\to E$ e $h: F\to G$ funções tais que $f(A)\subset D$ e $g(D)\subset F$.

Vamos mostrar que

$$(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f).$$

De fato, $\forall x\in A$, temos:

$$\big(\underbrace{(h\circ g)}_{u}\circ f\big)(x) = (u\circ f)(x) = u(f(x)) = (h\circ g)\,(\underbrace{f(x)}_{y})$$

$$= (h\circ g)(y) = h(g(y)) = h(g(f(x))) =$$

$$= h(\underbrace{(g\circ f)}_{v}(x)) = h(v(x)) = (h\circ v)(x) =$$

$$= \big(h\circ(g\circ f)\big)(x), \quad \forall x\in A.$$

Ou seja, obtemos que

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x), \quad \forall x \in A,$$

i.e.,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

$\square$

---

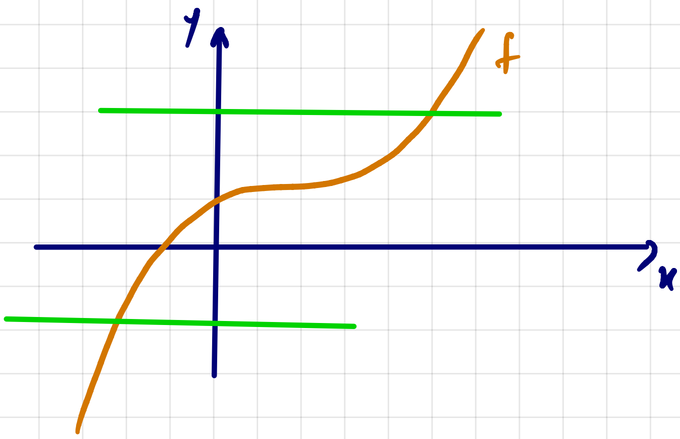
INJETIVIDADE, SOBREJETIVIDADE E BIJETIVIDADE:

**Def.:** Seja $f: A \to B$ uma função. Dizemos que $f$ é injetiva se, e somente se, $\forall x, y \in A$: $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$, ou seja, domínios diferentes possuirão imagens diferentes.

[ cada valor do domínio A é "injetado" num valor diferente no contradomínio B ].

Ou, equivalentemente, $f: A \to B$ é injetiva se, e só se,

$$f(a) = f(b) \implies a = b.$$



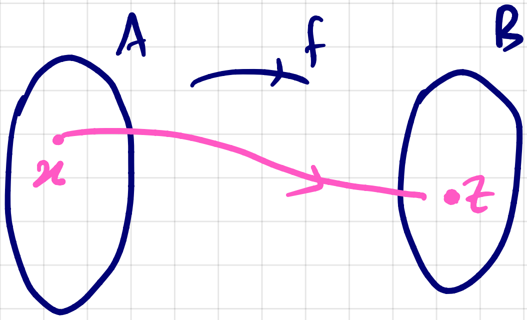

"TESTE DA RETA HORIZONTAL"

Se toda reta horizontal cruzar o gráfico de f em apenas um ponto, então f é injetiva.

**Def.:** Seja $f: A \to B$ uma função. Dizemos que $f$ é SOBREJETIVA se, e somente se, $f(A) = B$.

Ou seja, $f: A \to B$ é sobrejetiva se, e só se:

$\forall z \in B$, $\exists\, x \in A$ tal que $f(x) = z$.




ASSIM, TODO O CONJUNTO B É IMAGEM DO CONJUNTO A, MEDIANTE f, OU SEJA, A f SOBREPÕE TODO O B COM O CONJ. A.

**Ex.:** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$.

Neste caso, temos que $f(x) = x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

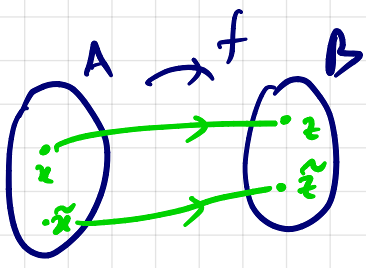
Logo, $\text{Im}(f) = [0, +\infty) \neq CD(f) = \mathbb{R}$

Ou seja, $f$ não é sobrejetiva.

**Def.:** Dizemos que $f: A \to B$ é bijetiva se, e só se, for injetiva e sobrejetiva. Mais precisamente, $f: A \to B$ é bijetiva se, e só se,

$\forall z \in B$, $\exists!\, x \in A$ tal que $f(x) = z$.

existe um único.



PROPOSIÇÃO: A composição de funções preserva injetividade, sobrejetividade e bijetividade.

Ou seja; a composição de funções injetivas resulta em uma função injetiva, et cetera.

DEMONSTR.: Sejam $f: A \to B$ e $g: B \to C$ funções injetivas. A mostrar: $g \circ f : A \to C$ é injetiva.

De fato, supondo que $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b)$, temos:

$$(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b) \Rightarrow g(f(a)) = g(f(b)) \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$$

pois $g$ é injetiva.

pois $f$ é injetiva

Portanto, $g \circ f$ é injetiva.

A prova dos demais fica como exercício.

$\square$