CÁLCULO 1, T2

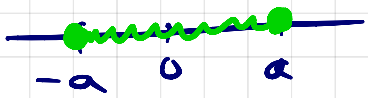
20/06/24 - AULA 04

Na aula passada estudamos inequações em $\mathbb{R}$, e fizemos o estudo do MÓDULO de um número real:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Dentre as propriedades vistas, recordamos aqui a seguinte:

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$



Encerramos a aula passada esquematizando a solução do exercício: obter os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\left| \frac{2-3x}{x-1} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

SOLUÇÃO:

$$\left| \frac{2-3x}{x-1} \right| \leq \frac{1}{2} \iff \underbrace{-\frac{1}{2} \leq \frac{2-3x}{x-1}}_{(II)} \overbrace{\leq \frac{1}{2}}^{(I)}$$

$$(I): \quad \frac{2-3x}{x-1} \leq \frac{1}{2} \iff \frac{2-3x}{x-1} - \frac{1}{2} \leq 0 \iff$$

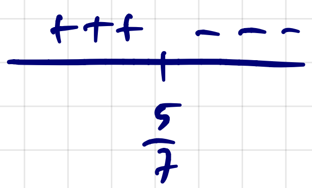
$$\iff \frac{2.(2-3x) - 1.(x-1)}{2.(x-1)} \leq 0 \iff$$

$$\frac{4-6x-x+1}{2(x-1)} \le 0 \iff \frac{5-7x}{2(x-1)} \le 0$$

$$\iff \frac{5-7x}{2x-2} \le 0$$

ZEROS DO NUMERADOR:

$$5-7x=0 \iff 7x=5 \iff x=\frac{5}{7}$$



$\forall x<\frac{5}{7} \rightsquigarrow 7x<5 \rightsquigarrow 7x-5<0$

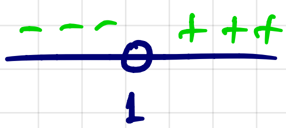
$\rightsquigarrow -5+7x>0$

$\forall x>\frac{5}{7} \rightsquigarrow 7x>5 \rightsquigarrow 7x-5>0$

$\rightsquigarrow -7x+5<0$

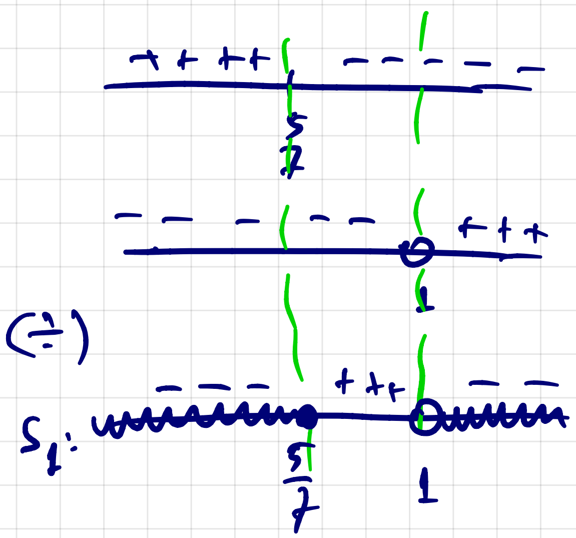
ZEROS DO DENOMINADOR: $(\neq 0)$

$$2x-2=0 \iff x=1.$$



$\forall x<1 \xRightarrow{-1} x-1<0 \xRightarrow{\times 2} 2x-2<0$

$\forall x>1 \xRightarrow{-1} x-1>0 \xRightarrow{\times 2} 2x-2>0$

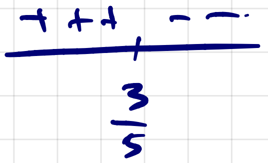


$$(\mathrm{II}):\ -\frac{1}{2} \leq \frac{2-3x}{x-1} \iff \frac{2-3x}{x-1}+\frac{1}{2} \geq 0 \iff$$

$$\iff \frac{2\cdot(2-3x)+(x-1)}{2(x-1)} \geq 0 \iff \frac{4-6x+x-1}{2x-2} \geq 0$$

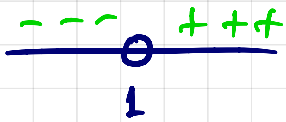
$$\iff \frac{3-5x}{2x-2} \geq 0$$

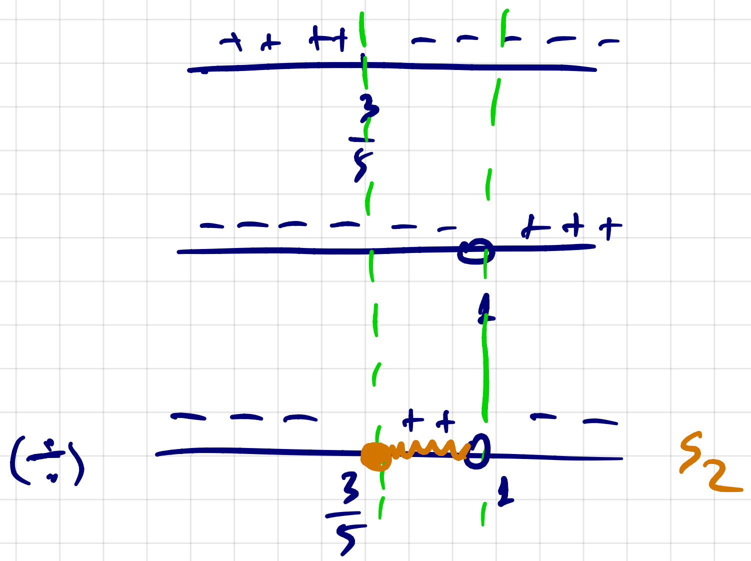
ZEROS DO NUMERADOR: $3-5x=0 \iff 5x=3 \iff x=\frac{3}{5}$



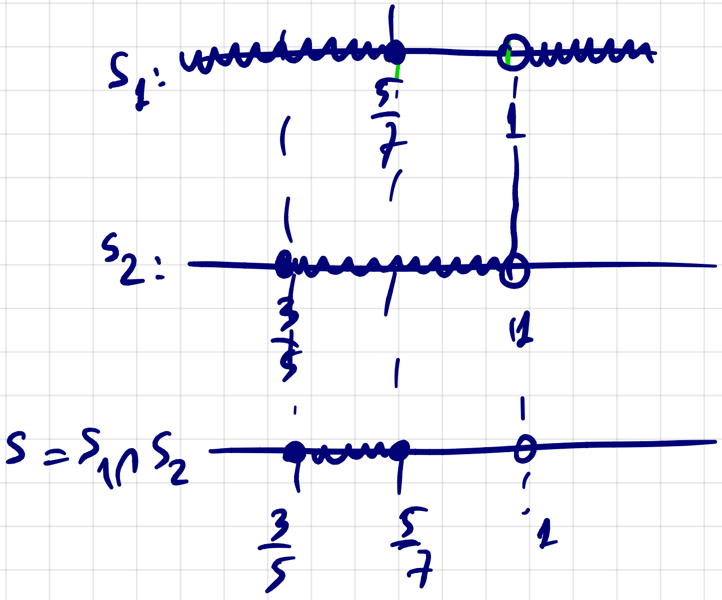
$$\begin{cases} \forall x < \frac{3}{5} \xrightarrow{\times 5} 5x<3 \xrightarrow{-3} 5x-3<0 \xrightarrow{\times(-1)} 3-5x>0 \\ \forall x > \frac{3}{5} \longrightarrow \dots \longrightarrow 3-5x<0 \end{cases}$$

ZEROS DO DENOMINADOR $(\neq 0)$ (mesmo do caso (I))





Por fim, a solução S será dada por $S = S_1 \cap S_2$, ou seja:



$\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{5} > \frac{3}{5}\cdot\frac{7}{7}$

$$\Longrightarrow S = \left[\frac{3}{5}, \frac{5}{7}\right].$$

FUNÇÕES:

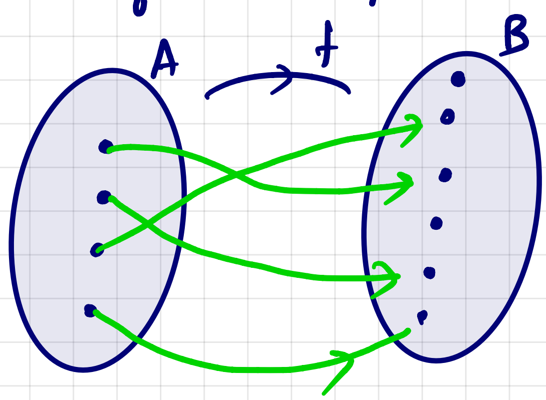
<u>Def:</u> Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Chama-se função de A em B toda a regra $f: A \to B$ tal que manda <u>TODOS</u> os elementos de A para elementos de B, de maneira <u>ÚNICA</u>.

Simbolicamente, escreve-se:

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) = y. \end{aligned}$$

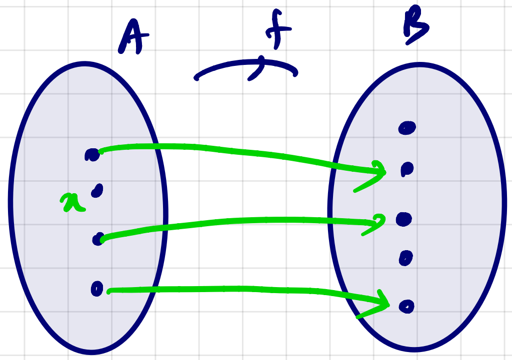
Vejamos alguns exemplos e contra-exemplos em diagramas:

01)



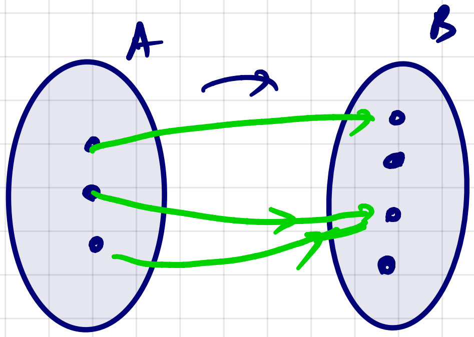
f é uma função de A em B

02)



f não é função de A em B, pois existe um elemento $x \in A$ que não é levado para B, via f.

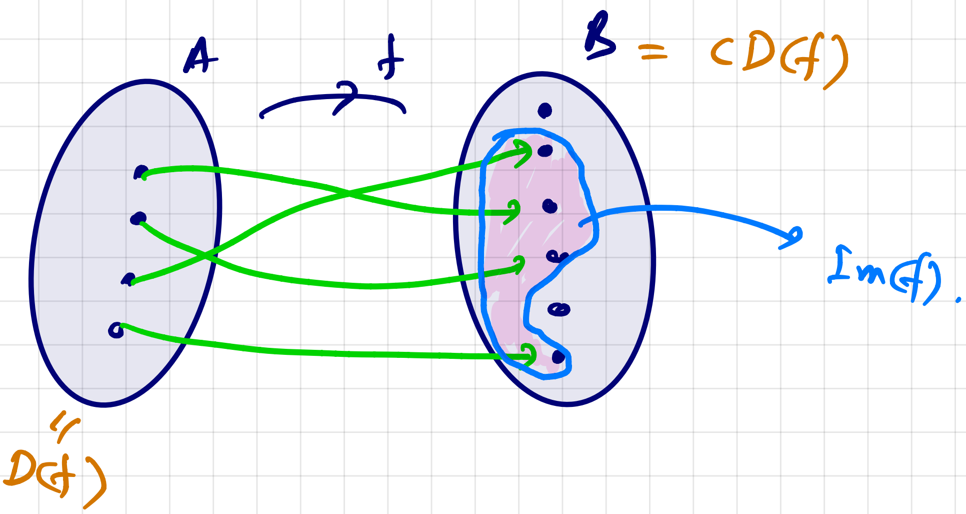
03)



f é uma função de A em B.

Dada uma função $f: A \to B$, dizemos que o conj. A é o DOMÍNIO de f, e escrevemos $A = D(f)$; o conj. B é o CONTRADOMÍNIO de f, e escrevemos $B = CD(f)$ e o conjunto os elementos $y \in B$ que recebem x mediante f, ou seja, onde $y = f(x)$, chama-se <u>IMAGEM</u> de f, e escrevemos

$$f(A) = Im(f).$$

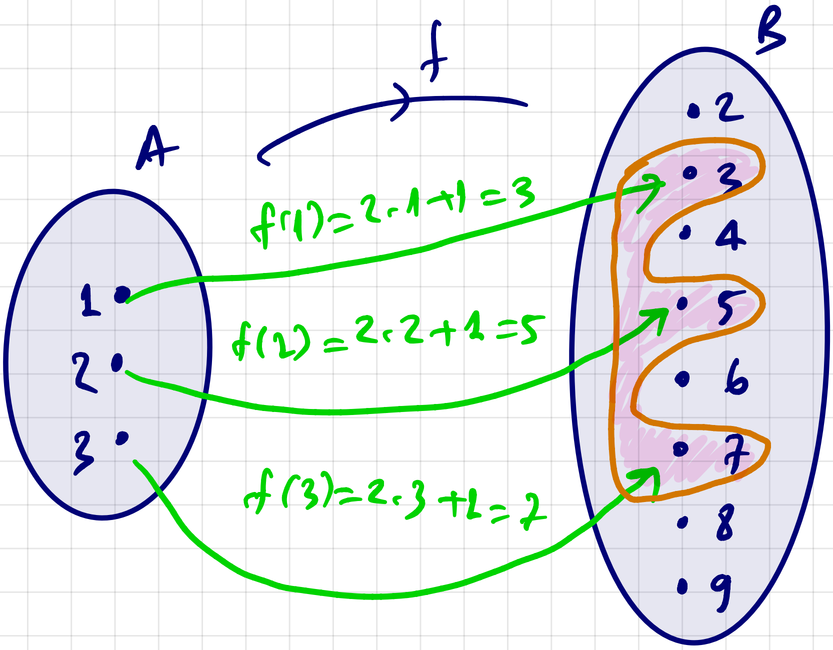


<u>Ex:</u> $f: \{1, 2, 3\} \to \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$$f(x) = 2x + 1.$$

Neste caso, temos: $D(f) = \{1, 2, 3\}$

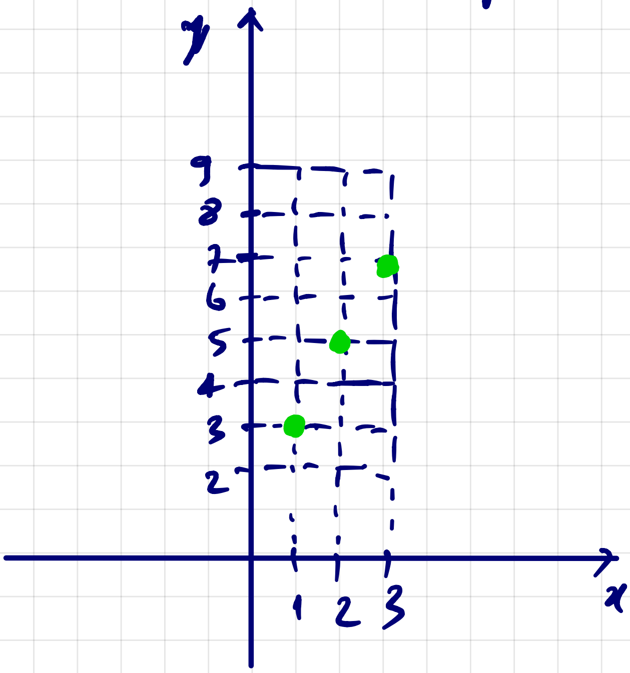
$CD(f) = \{2, 3, 4, \ldots, 9\}$.



$Im(f) = \{3, 5, 7\}$.

Dada $f: A \to B$
$x \mapsto y = f(x)$,

podemos montar um esboço gráfico de f no plano xy: marcando os pares ordenados $(x, \underbrace{f(x)}_{y})$



Defª Dadas duas funções $f, g: A \to B$.

Dizemos que elas são iguais, ou seja, que $f = g$, se, e somente se, $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$.

Ex.: $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$; $g: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$; $g(x) = x \cdot |x|$

Note que, $\forall x \geq 0$, $|x| = x$, e então

$$g(x) = x \cdot |x| = x \cdot x = x^2 = f(x), \ \forall x \in [0, +\infty)$$

Portanto, escreveremos que $f = g$.

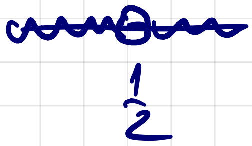
DOMÍNIO. Toda vez que for dada apenas a expressão que define f; esta função é considerada $f: A \to \mathbb{R}$, onde A é o máximo campo de existência que torne a expressão que define f possível. Vejamos exemplos:

(a) $f(x) = \dfrac{x+3}{2x-1}$. $D(f) = ?$

SOLUÇÃO:
condições de existência:

- $x + 3 \in \mathbb{R}$. ~~www~~

- $2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{2}$



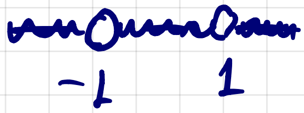
Logo, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-3x}}{x^2-1} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$. $D(f) = ?$

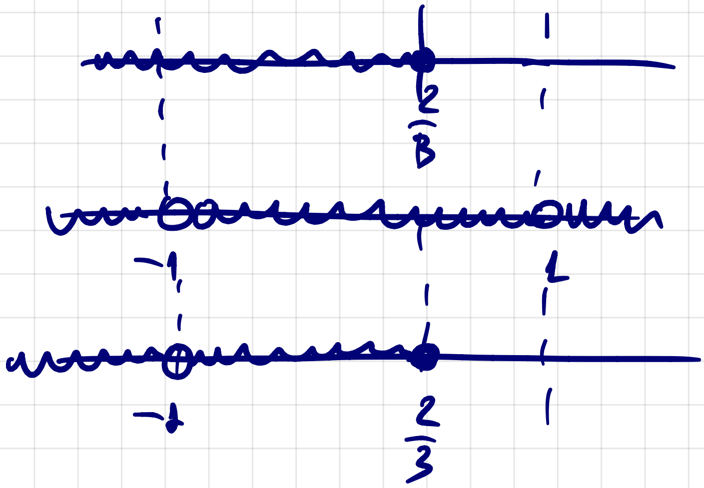
Solução: condições de existência:

- $2-3x \geq 0 \rightsquigarrow -3x \geq -2 \overset{\times(-1)}{\rightsquigarrow} 3x \leq 2 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3}$

- $x^2 - 1 \neq 0 \rightsquigarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$
- $x + 1 \neq 0 \rightsquigarrow x \neq -1.$



Tomando a interseção, vamos obter



$D(f) = (-\infty, \frac{2}{3}] \setminus \{-1\}$.

(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-2x}{x-1}}$. $\qquad D(f) = ?$

<u>solução</u>: "Há vontade de fazer: $\sqrt{\dfrac{1-2x}{x-1}} = \dfrac{\sqrt{1-2x}}{\sqrt{x-1}}$".

Porém isso é errado! Pois a propriedade

$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ só vale se $a \geq 0$ e $b > 0$.

$$\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

No entanto $\sqrt{\dfrac{1-2x}{x-1}}$ tem sentido se $1-2x<0$, e $x-1<0$,

o que, separadamente, não tem sentido olhando

$\sqrt{1-2x}$ e $\sqrt{x-1}$.

Assim, para obter o domínio de $y = \sqrt{\dfrac{1-2x}{x-1}}$,

a condição de existência que deve ser imposta é:

$$\frac{1-2x}{x-1} \geq 0$$

Agora, basta estudar sinais do num. e do denom., c.f. feito na aula passada (e foi revisitado via o exemplo com módulo no início desta aula).

Fica como exercício sua resolução.