CÁLCULO 1, T2

18/06/24 – AULA 03

INEQUAÇÕES: Como $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um corpo ordenado, então, podemos resolver desigualdades como nos exemplos a seguir: obter os valores de $x \in \mathbb{R}$ que verifiquem as seguintes desigualdades:

01) $x - 3 < 2 + 4x$.

02) $-3 \leq 1 - 2x \leq 2$

03) $\dfrac{1}{x+4} < 1$

04) $\dfrac{x+2}{1-3x} \leq 1$.

SOLUÇÕES:

$$x - 3 < 2 + 4x \quad (+3)$$

$$x \cancel{-3} \cancel{+3} < 2 + 4x + 3$$

$$x < 5 + 4x \quad (-4x)$$

$$x - 4x < 5 \cancel{+4x} \cancel{-4x}$$

$$-3x < 5 \quad \times\left(-\frac{1}{3} < 0\right)$$

$$\left(\cancel{-}\frac{1}{\cancel{3}}\right) \cdot (\cancel{-3}x) > 5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$x > -\frac{5}{3}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : x > -\frac{5}{3}\right\} \text{ ou } \left(-\frac{5}{3}, +\infty\right).$$

02) $-3 \le 1-2x \le 2$ $\quad (-1)$

$$-3-1 \le \cancel{1}-2x-\cancel{1} \le 2-1$$

$$-4 \le -2x \le 1 \qquad \times\left(-\frac{1}{2}<0\right)$$

$$-\frac{1}{\cancel{2}}\times(-\cancel{4}) \ge -\frac{1}{2}\cdot(-2x) \ge -\frac{1}{2}\cdot(1)$$

$$2 \ge x \ge -\frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} \le x \le 2$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} \le x \le 2\right\}$$

$$= \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$$

03) $\dfrac{1}{x+4} < 1$

$$\cancel{\frac{1}{x+4} < \frac{1}{1}}$$

$$\cancel{x+4 < 1}$$

NÃO PODEMOS MULTIPLICAR DESIGUALDADES EM CRUZ, POIS SE UM DOS MULTIPLICANDOS FOR NEGATIVO A DESIGUALDADE DEVERIA MUDAR.

A IDEIA, NESTES CASOS, É COMPARAR COM ZERO, DO SEGUINTE MODO:

$$\frac{1}{x+4} < 1 \iff \frac{1}{x+4} - \frac{1}{1} < 0$$

$$\iff \frac{1 - 1.(x+4)}{x+4} < 0 \iff \frac{1-x-4}{x+4} < 0$$

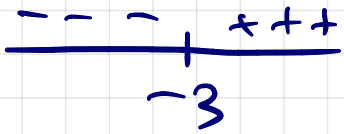
$$\iff \frac{-x-3}{x+4} < 0 \iff -\frac{x+3}{x+4} < 0 \quad (\times -1)$$

$$\iff \frac{x+3}{x+4} > 0$$ (COMPARAMOS COM ZERO)

Vamos, agora, estudar o sinal do numerador e o sinal do denominador, e considerar o intervalo onde o quociente fica > 0.

- zeros do numerador: $x+3=0 \iff x=-3$

NUM.:

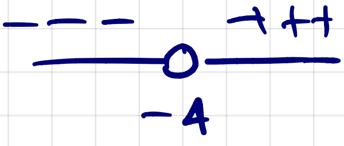


$$\begin{cases} \forall x < -3 \rightsquigarrow x+3 < 0 \\ \forall x > -3 \rightsquigarrow x+3 > 0 \end{cases}$$

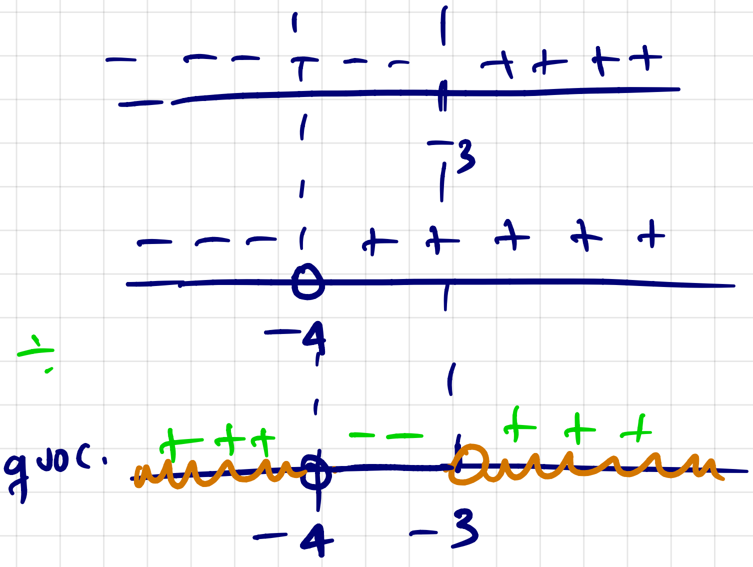
- zeros do denominador $(\neq 0)$

$$x+4=0 \iff x=-4$$

DENOM.:



$$\begin{cases} \forall x < -4 \to x+4 < 0 \\ \forall x > -4 \to x+4 > 0 \end{cases}$$



solução: $(-\infty, -4) \cup (-3, +\infty)$.

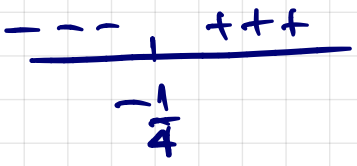
04) $\frac{x+2}{1-3x} \leq 1$. Novamente, vamos ter que comparar com o zero. Assim:

$$\frac{x+2}{1-3x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x+2}{1-3x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+2-1.(1-3x)}{1-3x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+2-1+3x}{1-3x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x+1}{1-3x} \underline{\underline{\leq 0}}$$

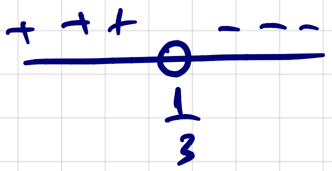
- ZEROS DO NUMERADOR: $4x+1=0 \Leftrightarrow 4x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$



$$\begin{cases} \forall x < -\frac{1}{4} \overset{\times 4}{\rightsquigarrow} 4x < -1 \overset{+1}{\rightsquigarrow} 4x+1<0 \\ \forall x > -\frac{1}{4} \rightsquigarrow 4x > -1 \rightsquigarrow 4x+1>0 \end{cases}$$

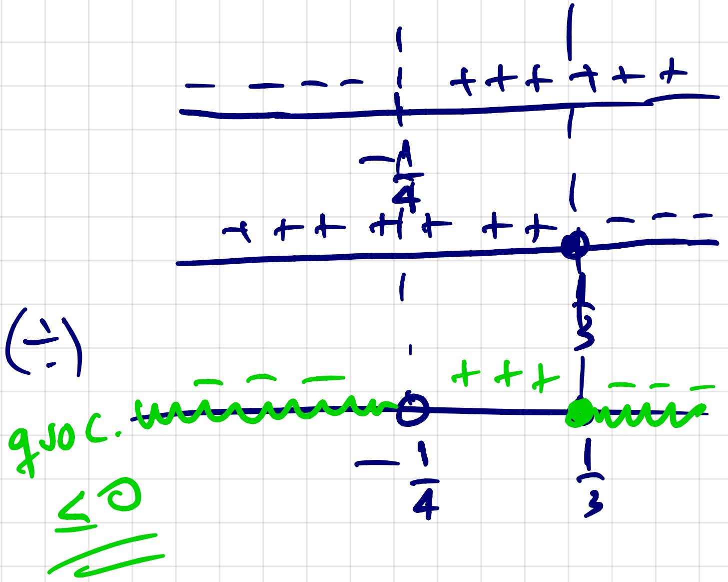
- ZEROS DO DENOMINADOR: $(\neq 0) \rightarrow$ pois senão teremos divisão por zero.

$1-3x=0 \iff 3x=1 \iff x=\frac{1}{3}$



$$\begin{cases} \forall x < \frac{1}{3} \underset{\times 3}{\Rightarrow} 3x<1 \overset{-1}{\rightsquigarrow} 3x-1<0 \underset{(x-1)}{\rightsquigarrow} -3x+1>0 \\ \forall x > \frac{1}{3} \rightarrow 3x>1 \rightsquigarrow 3x-1>0 \underset{x(-1)}{\rightsquigarrow} -3x+1<0 \end{cases}$$

DIVISÃO DE SINAIS:



$D(f) = (-\infty, -\frac{1}{4}) \cup [\frac{1}{3}, +\infty)$.

MÓDULO DE UM NÚMERO REAL:

Def.: Definimos o módulo de $x \in \mathbb{R}$ por:

$$|x| = \text{máx.}\{x, -x\}.$$

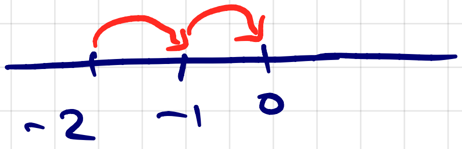
Ex.: $\left|-\frac{3}{4}\right| = \text{máx.}\{-\frac{3}{4}, -(-\frac{3}{4})\} = \text{máx.}\{-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\} = \frac{3}{4}$.

Uma outra forma de definir o módulo é escrever:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Geometricamente, $|x|$ representa a distância de $x \in \mathbb{R}$ à origem 0.

Ex: $|-2| \underset{\underbrace{-2<0}}{\overset{\uparrow}{=}} -(-2) = 2$.



Note que, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos $-|x| \leq x \leq |x|$.

PROPOSIÇÃO: Dado $a>0$. Então, são equivalentes:

(i) $|x| \leq a$;

(ii) $-a \leq x \leq a$.

DEMONSTRAÇÃO:

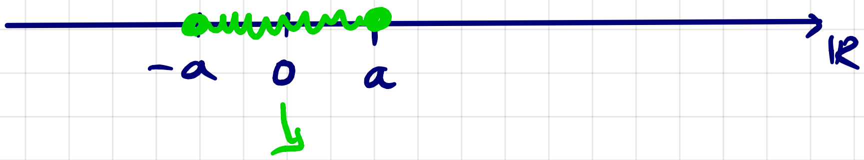
$$|x| \leq a \iff \text{máx.}\{x, -x\} \leq a \iff x \leq a \text{ e } \underbrace{-x \leq}_{(\times -1)} a$$

$$\iff x \leq a \text{ e } x \geq -a.$$

$$\iff -a \leq x \leq a.$$

□

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO PARA $|x| \leq a$; $a>0$:



$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

COROLÁRIO: Sendo $a>0$, então $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ ou $x < -a$

DEMONSTR.: Seja o conjunto:

$$W = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq a\} = \{x \in \mathbb{R} : -a \leq x \leq a\}$$
$$= [-a, a]$$

Então,

$$W^c = \{x \in \mathbb{R} : |x| \not\leq a\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| > a\}$$

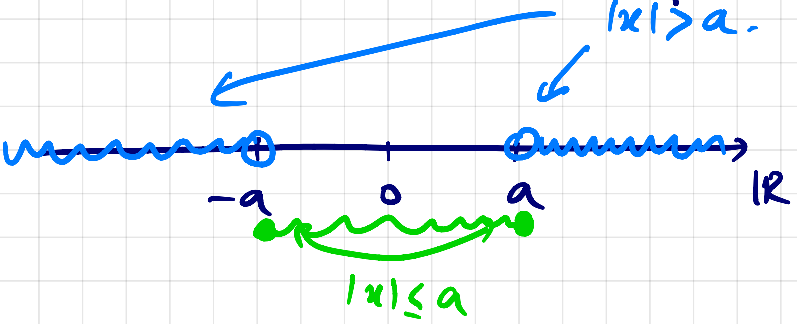
$$= [-a, a]^c = \underline{(-\infty, -a)} \cup \underline{(a, +\infty)}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : \underline{x < -a} \text{ ou } \underline{x > a}\}$$

Portanto, $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ ou $x > a$.

$\square$

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO ~~PARA $|x|>a$~~:



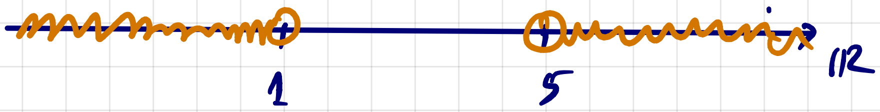
Represente, geometricamente, o conjunto: $|x-3| > 2$.

SOLUÇÃO: $|x-3| > 2 \Leftrightarrow$ $x-3 < -2$ ou

$x-3 > 2$

- $x-3 < -2 \iff x < -2+3 \iff \underline{x < 1}$

- $x-3 > 2 \iff x > 3+2 \iff x > 5$



PROPOSIÇÃO: Valem as seguintes propriedades para o módulo: $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$, tem-se:

(i) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(ii) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, desde que $y \neq 0$.

(iii) $|x+y| \leq |x|+|y|$ (desigualdade triangular).

(iv) $= |x-y| \geq |x|-|y|$

DEMONSTR.: Provaremos (iii) e (iv)

Note que, c.f. visto anteriormente, temos:

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

$$+ \quad -|y| \leq y \leq |y|$$

. Somando, vem:

$$-|x|-|y| \leq x+y \leq |x|+|y|$$

; ou seja:

$$-(\underbrace{|x|+|y|}_{a>0}) \leq x+y \leq \underbrace{|x|+|y|}_{a} \iff$$

$$\Leftrightarrow \quad |x+y| \leq a = |x|+|y|$$

$$\Leftrightarrow \quad |x+y| \leq |x|+|y|$$, o que prova (iii)

(iv) $|x-y| \geqslant |x| - |y|$:

Note que:

$$|x| = |x+0| = |x-y+y| = |(x-y)+y| \leq$$

DESIGUALDADE TRIANGULAR

$$\leq |x-y| + |y|$$

Ou seja, obtemos:

$$|x| \leq |x-y| + |y| \qquad (-|y|)$$

$$\Leftrightarrow \quad |x| - |y| \leq |x-y|$$

$$\Leftrightarrow \quad |x-y| \geqslant |x| - |y| .$$

$\square$

EXERCÍCIO: Resolva as inequações:

01) $|x-3| \leq 2$ 02) $\left|\frac{2-3x}{x-1}\right| \leq \frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO:

01) $|\underbrace{x-3}_{X}| \leq 2 \iff -2 \leq x-3 \leq 2 \quad (+3)$

$$3-2 \leq x\cancel{-3}\cancel{+3} \leq 2+3$$

$$1 \leq x \leq 5$$

$$S = [1, 5]$$

02) $\left|\frac{2-3x}{x-1}\right| \leq \frac{1}{2} \iff \underbrace{-\frac{1}{2} \leq \frac{2-3x}{x-1}}_{(II)} \overbrace{\leq \frac{1}{2}}^{(I)}$

$$|X| \leq a \iff -a \leq X \leq a$$

Ou seja, temos 2 inequações:

(I): $\frac{2-3x}{x-1} \leq \frac{1}{2}$; (II): $\frac{2-3x}{x-1} \geq -\frac{1}{2}$

Deveremos, para cada uma delas, comparar com o zero, estudando sinal do numerador e do denominador. Teremos uma solução S_1 para o sub problema (I) e uma solução S_2 para o subproblema (II).

A solução final S será dada pela intersecção entre S_1 e S_2, ou seja,

$$S = S_1 \cap S_2 .$$

Fica como exercício completar a resolução deste probema.