CÁLCULO, T2

13/06/24 – AULA 02

Vamos assumir conhecidos os seguintes conjuntos numéricos:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} ; q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Def.: O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, equipado com as operações:

adição: $+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$$\left(\frac{p}{q}, \frac{a}{b}\right) \longmapsto \frac{p}{q} + \frac{a}{b} := \frac{p \cdot b + q a}{q \cdot b},$$

e o produto

$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$\left(\frac{p}{q}, \frac{a}{b}\right) \longmapsto \frac{p}{q} \cdot \frac{a}{b} := \frac{p \cdot a}{q \cdot b}$$

goza das seguintes propriedades: $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$:

aditivas:

A_1: $x + (y + z) = (x + y) + z$ (associatividade)

A_2: $x + y = y + x$ (comutatividade)

A_3 : $\exists\ 0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x + 0 = x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$
(zero é o neutro aditivo)

A_4 : $\forall x \in \mathbb{Q}$, $\exists y \in \mathbb{Q}$ tal que $x + y = 0$
(y é o simétrico aditivo de x,
e é denotado por $-x$)

multiplicativos:

M_1 : $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (associativa)

M_2 : $x \cdot y = y \cdot x$ (comutatividade)

M_3 : $\exists\ 1 \in \mathbb{Q}$ tal que $x \cdot 1 = x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$
(1 é o neutro multiplicativo)

M_4 : $\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\exists\ y \in \mathbb{Q}$ tal que

$$x \cdot y = 1.$$

(y é o simétrico multiplicativo, ou
inverso de $x \neq 0$, e é
denotado por x^{-1} ou $\frac{1}{x}$).

distributivos:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Neste caso, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ chama-se <u>CORPO</u> dos números racionais.

No corpo dos números racionais existe o conceito de ordem, como segue.

<u>Def</u>: Dados $x, y \in (\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Dizemos que $x \leq y$ se, e somente se, $\exists\, m \geq 0$ tal que

$$x + m = y$$

<u>Ex</u>.: $\frac{3}{4} \leq \frac{5}{4}$, pois tome $m = \frac{2}{4} \geq 0$, e é tal que

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}.$$

A relação de ordem $\leq$ cumpre as seguintes propriedades, Dados $x, y, z \in \mathbb{Q}$, então:

O1) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$, $\forall z \in \mathbb{Q}$.

O2) $x \leq y$; $z > 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

O3) $x \leq y$, $z < 0 \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z$

DEMONSTRAÇÃO:

01) Suponha que $x \leq y$. Então, $\exists\, m \geqslant 0$ tal que $x + m = y$.

Somando z em ambos os membros, vamos obter:

$$(x+m)+z = y+z.$$

Pela comutatividade:

$$(m+x)+z = y+z \text{; e pela associativ.;}$$

$$m+(x+z) = y+z.$$

Novamente, pela comutatividade,

$$(x+z)+m = y+z \text{; com } m \geqslant 0.$$

Portanto, $x+z \leq y+z$.

Ex.: $3 \leq 7 \Rightarrow 3-2 \leq 7-2 \Rightarrow 1 \leq 5$
$+(-2)$

02) $x \leq y$; $z > 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

Sendo $x \leq y$, então, $\exists\, m \geqslant 0$ tal que

$$x + m = y \Longrightarrow (x+m)\cdot z = y \cdot z$$
$\times\ z > 0$

Pela distributividade:

$$x \cdot z + m \cdot z = y \cdot z \text{; como } m \geqslant 0 \text{ e } z > 0,$$

então $m\cdot z \geq 0$. Então:

$$x\cdot z + \underbrace{m\cdot z}_{\geq 0} = y\cdot z \Longrightarrow x\cdot z \leq y\cdot z.$$

Ex: $2 \leq 9$; $\times\, 3 \geq 0$

$$\Rightarrow 2\cdot 3 \leq 9\cdot 3 \Longrightarrow 6 \leq 27$$

03) $x \leq y$, $z < 0 \Rightarrow x\cdot z \geq y\cdot z$

Como $x \leq y$, então, $\exists\, m \geq 0$ tal que

$$x + m = y \xRightarrow[\times\, z<0]{} (x+m)\cdot z = y\cdot z$$

Pela distributividade, teremos:

$$x\cdot z + \underbrace{m\cdot z}_{\leq 0} = y\cdot z$$

Subtraindo $m\cdot z$, obtemos:

$$x\cdot z + \cancel{m\cdot z} - \cancel{m\cdot z} = y\cdot z - m\cdot z$$

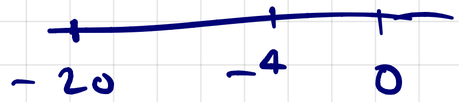
$$x\cdot z = y\cdot z \underbrace{- \underbrace{\underbrace{m}_{\geq 0}\,\underbrace{z}_{<0}}_{\leq 0}}_{\geq 0}$$

Ou seja, temos

$$y\cdot z + \underbrace{-\,m\cdot z}_{\geq 0} = x\, z \Longrightarrow y\cdot z \leq x\cdot z,$$ ou seja, $x\cdot z \geq y\cdot z$

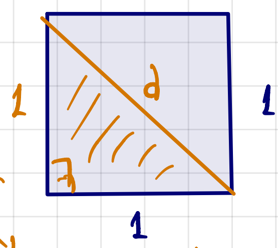
Ex.: $2 \leq 10 \Rightarrow -4 \geq -20$

$\times(-2<0)$



Até aqui concluímos que: o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais é ordenado. Porém, $\mathbb{Q}$ é INSUFICIENTE no seguinte sentido. Existem números racionais que não possuem raiz quadrada.

Ex.: $\sqrt{2}$ não é racional.



Pelo T. de Pitágoras;

$d^2 = 1^2 + 1^2$

$d^2 = 2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$??

$\Uparrow$

ISSO FOI UM VERDADEIRO DESASTRE PARA OS PITAGÓRICOS.

DEMONSTR.: Por absurdo, suponha que $\sqrt{2}$ seja racional. Então, $\exists\, p, q \in \mathbb{N}$ tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, com

$$mdc(p,q) = 1,$$ ou seja,

a fração $\frac{p}{q}$ já está simplificada ao máximo, i.e., é irredutível.

Então, elevando ao quadrado, vamos obter

$$(\cancel{\sqrt{2}})^{\cancel{2}} = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2;$$

ou seja, p^2 é par, então p é par. Assim, $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que $\boxed{p = 2.m}$. Assim:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} = \frac{(2m)^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow \quad 2 = \frac{4m^2}{q^2} \Rightarrow \cancel{2}q^2 = \cancel{4}^{2}m^2$$

$$\Rightarrow q^2 = 2m^2, \quad \text{ou seja, } q^2 \text{ é par.}$$

Logo, q é par. Assim, $\exists\, \ell \in \mathbb{N}$ tal que

$$\boxed{q = 2\ell\,.}$$

Então, encontramos:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2m}{2\ell} \,. \quad \Rightarrow \operatorname{mdc}(p,q) \geq 2\,,$$

um absurdo, pois admitimos $\operatorname{mdc}(p,q) = 1$.
Portanto, $\sqrt{2}$ não é racional.

$\square$

Uma outra maneira interessante de concluir que $\sqrt{2}$ não é racional consiste em escrever:

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1+\frac{1}{1+\cdots}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}},$$

chamada de REPRESENTAÇÃO PARA $\sqrt{2}$ EM FRAÇÃO CONTÍNUA.

Com essa representação podemos obter uma aproximação para $\sqrt{2}$, através de TRUNCAMENTOS da mesma.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}$$

1ª APROXIMAÇÃO: $\sqrt{2} \approx 1$

2ª APROX. : $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

3ª APROX.: $\sqrt{2} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{2}} =$

$$= 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

4ª APROX.: $\sqrt{2} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} =$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5}{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{5}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{12}{5}} = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12}$$

$$= 1,416666\ldots$$

Ou seja, na 4ª aprox. temos

$$\sqrt{2} \approx 1,416666\ldots$$

[o valor extraído de uma calculadora é aproximadamente 1,41421356.

Note que $\sqrt{2}$ não é racional pois a sua representação em fração contínua é infinita.

O <u>completamento</u> dos racionais é o conj $\mathbb{R}$ dos números reais. Ou seja, definimos $\mathbb{R}$ por:

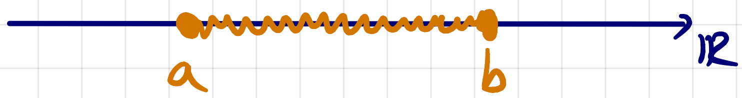
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I},$$ onde $\mathbb{I}$ é o conj. de todos os números que não são racionais, que chamaremos de conj. dos números irracionais.

Então $\mathbb{R}$ será um corpo ordenado e completo, ou seja, a questão da insuficiência não existirá.

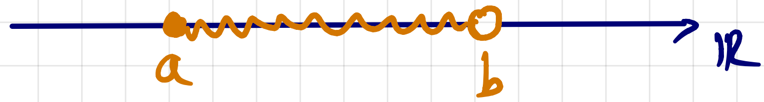
Em $\mathbb{R}$ temos o seguinte conceito de intervalo:

<u>Def.:</u> Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Definimos os intervalos:

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ – intervalo fechado.

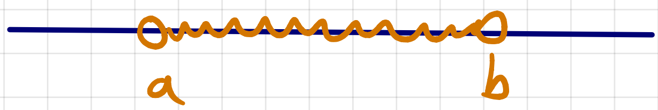


- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ – intervalo misto

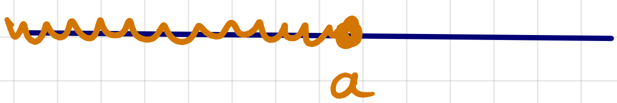


- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.

- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.



- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$.

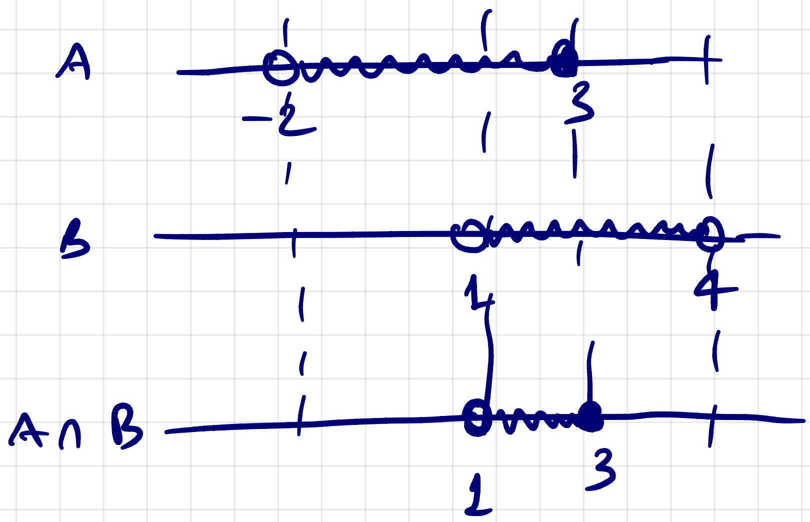


- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

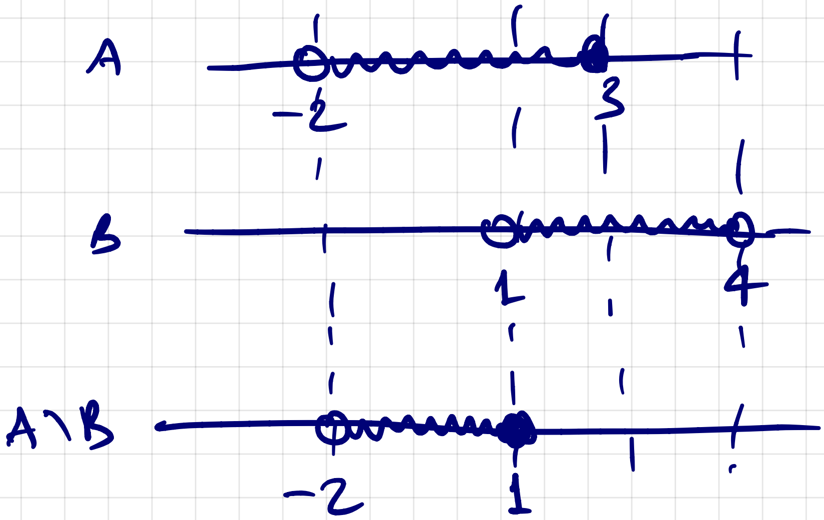
et cetera.

Ex: $A = (-2, 3]$; $B = (1, 4)$.

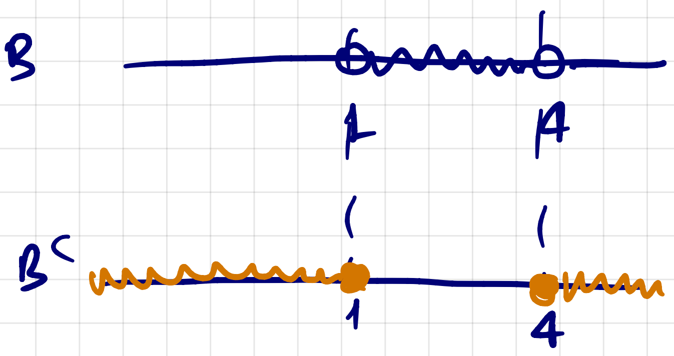
$A \cap B = ?$ $\quad$ $A \setminus B = ?$ $\quad$ $B^c = ?$



$A \cap B = (1, 3]$



$\Rightarrow A \setminus B = (-2, 1]$



$\Rightarrow B^c = (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$.