CÁLCULO 1, T2

11/06/24 – AULA 01

PROF. MAURÍCIO ZAHN.

TODAS AS INFORMAÇÕES SERÃO POSTADAS NA PÁGINA INSTITUCIONAL DA DISCIPLINA:

wp.ufpel.edu.br/zahn.

Serão 2 provas mais um exame final (caso preciso)

CONTEÚDO:

- CONJUNTOS E CONJUNTOS NUMÉRICOS
- O CORPO ORDENADO E COMPLETO DOS NÚMEROS REAIS.
- FUNÇÕES.
- LIMITES DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL.
- CONTINUIDADE
- DERIVADAS E APLICAÇÕES.

BIBLIOGRAFIAS:

Bibliografia básica

ANTON, H.; Bivens, I.; Davis, S. Cálculo. v.1. Porto Alegre: Bookman, 2014. ISBN: 9788582602263. E-book.

LEITHOLD, L. Cálculo com geometria analítica. v.1. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994.

STEWART, J. Cálculo. v.1. São Paulo: Cengage Learning, 2021. ISBN: 9786555584097. E-book.

Bibliografia complementar

ÁVILA, G. Análise matemática para licenciatura. São Paulo: Blucher, 2006. ISBN: 9788521215363. E-book.

ROGAWSKI, J.; Adams, C. Cálculo. v.1. Porto Alegre: Bookman, 2018. ISBN: 9788582604601. E-book.

RUDIN, W. Principles of mathematical analysis. 3.ed. New York: McGraw-Hill, 1976.

SPIVAK, M. Calculus. Texas: Publish or Perish, 2008.

THOMAS, G. B.; Weir, M. D.; Hass, J. Cálculo, v.1. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2012.

Além desses, pode ser usado o livro:

UM CURSO DE CÁLCULO. Ed. Ciência Moderna. 2013.

(MAURÍCIO ZAHN e LISIANE MENESES)

CONJUNTOS:

Não definimos conjunto. É, simplesmente, uma coleção de objetos.

Normalmente, os conjuntos são representados por letras maiúsculas do nosso alfabeto, e seus elementos por letras minúsculas.

Ex.: A = conj. de meses do planeta.

Para relacionar elemento com conjunto, usamos o símbolo $\in$ de pertinência. Assim, para dizer que um elemento a pertence a um conj. A, escrevemos

$$a \in A.$$

Para dizer que um elemento não está no conjunto, riscamos o símbolo, obtendo o símbolo $\notin$ (não pertence)

Ex.: A - conj. de todas as letras do nosso alfabeto.

Assim, temos que $j \in A$; $\theta \notin A$.

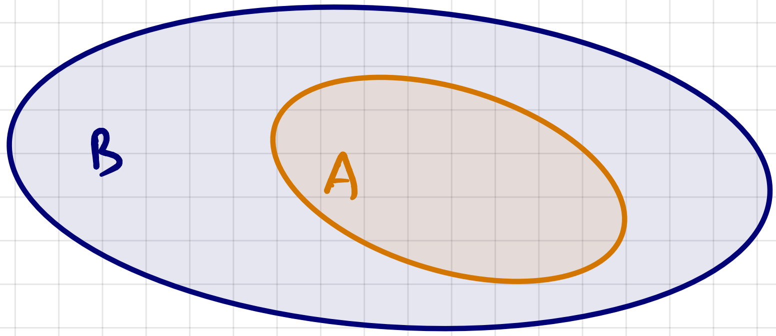
Para relacionar conjuntos usamos o símbolo de continência $\subset$. Ou seja, dados A e B conjuntos, temos que $A \subset B$ se todo elemento de A for elemento de B.

Simbolicamente, escrevemos:

$$A \subset B \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

Obs.: $\forall$: PARA TODO (quantificador universal)

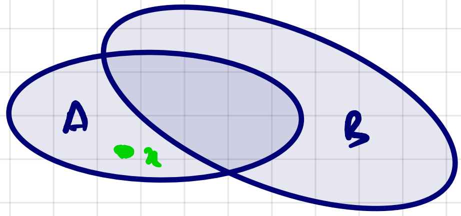
Este conceito pode ser visualizado geometricamente através de um diagrama, chamado de DIAGRAMA DE VENN:



Note que para que A não esteja contido em B, e escrevemos $A \not\subset B$, é suficiente que pelo menos um elemento de A não esteja em B. Ou seja:

$$A \not\subset B \overset{def}{\iff} \exists x \in A \text{ tal que } x \notin B.$$

$\exists$: EXISTE (quantificador existencial)



O <u>conjunto vazio</u>: é o conjunto que não tem elementos.

NOTAÇÃO: $\emptyset$ ou $\{ \}$

Ex: considere o conj. $\mathbb{N}$ dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Seja $X = \{a \in \mathbb{N} : 0 < a < 1\} = \emptyset$

POIS NÃO EXISTE NENHUM NÚMERO NATURAL ENTRE ZERO E 1, EXCLUINDO ZERO E 1.

Considere o conj. $\mathbb{Z}$ dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, \underbrace{1, 2, 3, \dots}_{\mathbb{N}}\}$$

Então, tem-se que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

O conjunto universo U é o conjunto onde todos os conjuntos estão válidos em uma dada discussão/teoria.

Um fato importante que tem-se é o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO: O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

DEMONSTRAÇÃO: Seja A um conjunto qualquer em um universo U. Vamos mostrar que $\emptyset \subset A$.

Por absurdo, suponha que $\emptyset \not\subset A$. Então, $\exists\, x \in \emptyset$ tal que $x \notin A$. Mas $x \in \emptyset$ viola o conceito de conjunto vazio. Absurdo!

Portanto, $\emptyset \subset A$.

Pela arbitrariedade da escolha do conj. A em U, segue que o vazio é subconj. de qualquer conjunto. $\square$

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS:

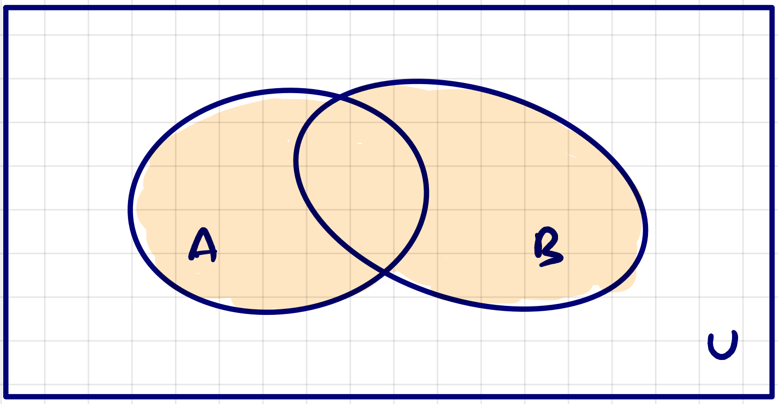
Def.: Sejam A e B conjuntos em um universo U. Definimos:

(i) a união entre A e B como sendo o conj. dos elementos que pertencem a pelo menos um dos dois conjuntos envolvidos. Simbolicamente:

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Em diagrama de Venn, temos a seguinte

representação para $A \cup B$:

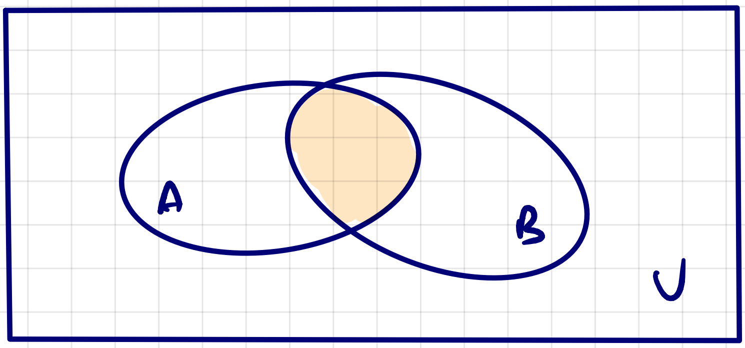


Note que $x \notin A \cup B \iff x \notin A$ e $x \notin B$

(ii) A interseção entre A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto dos elementos comuns a A e a B. Ou seja:

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Em diagrama de Venn, temos $A \cap B$ sombreado.

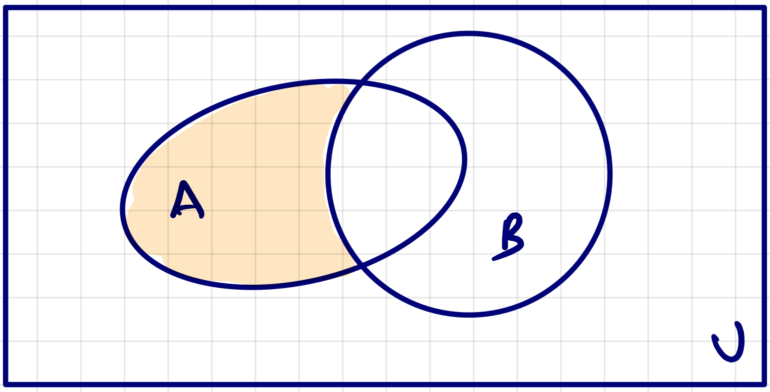


Note $x \notin A \cap B \iff x \notin A$ ou $x \notin B$

(iii) A diferença entre A e B, denotada por $A \setminus B$ ou $A - B$, como o conjunto dos elementos que estão em A e estão em B. Simbolicamente:

$$A \setminus B = \{x \in U : x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Em diagrama de Venn, temos $A \setminus B$ sombreado:

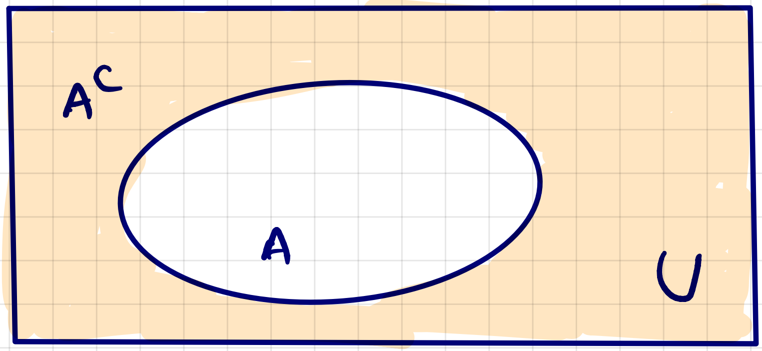


Note que $x \notin A \setminus B \iff x \notin A$ ou $x \in B$.

(iv) O complementar de um conjunto A, denotado por A^c, é o conjunto dos elementos que não pertencem ao conj. A. Ou seja:

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}.$$

Em diagrama de Venn temos A^c sombreado:



Note que $x \notin A^c \iff x \in A$.

Note que,

$$A \cup A^c = U \quad \text{e} \quad A \cap A^c = \emptyset.$$

__Def.:__ Dizemos que dois conjuntos A e B em um universo U são iguais se, e só se: $A \subset B$ e $B \subset A$.
Ou seja:

$$A = B \overset{\text{def.}}{\iff} A \subset B \text{ e } B \subset A.$$

PROPOSIÇÃO: Sejam, A, B, D, M, N conjuntos em um universo U. Então, valem as seguintes propriedades:

01) $A \cup A = A$; $A \cap A = A$

02) $A \cup \emptyset = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$

03) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ (COMUTATIVIDADE)

04) $A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D)$

$A \cup (B \cap D) = (A \cup B) \cap (A \cup D)$ } (DISTRIBUTIVIDADES)

05) $A \cup (B \cup D) = (A \cup B) \cup D$ (ASSOCIATIVIDADE)

06) $A \subset M$; $B \subset N \Rightarrow A \cup B \subset M \cup N$.

07) $(A^c)^c = A$ (IDEMPOTÊNCIA)

08) $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$.

09) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

10) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ } LEIS DE DE MORGAN

11) $\emptyset^c = U$; $U^c = \emptyset$

12) $A \cap A^c = \emptyset$; $A \cup A^c = U$.

DEMONSTRAÇÃO: Provaremos 06, 08 e 09.

06) $A \subset M$; $B \subset N$ $\Rightarrow$ $A \cup B \subset M \cup N$.

Suponha que $A \subset M$ e $B \subset N$.

A mostrar: $A \cup B \subset M \cup N$. Para isto, dado $x \in A \cup B$, precisamos mostrar que $x \in M \cup N$.

Seja $x \in A \cup B$. Então, $x \in A$ ou $x \in B$.

Como $A \subset M$ e $B \subset N$, então:

$$x \in A \Rightarrow x \in M \quad \text{ou} \quad x \in B \Rightarrow x \in N.$$

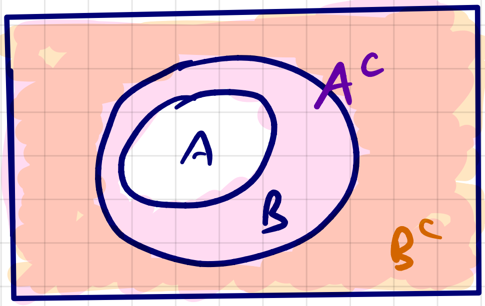
Ou seja, tem-se $x \in M$ ou $x \in N$, i.e.,

$$x \in M \cup N.$$

Portanto obtemos: $x \in A \cup B \Rightarrow x \in M \cup N$, e pela arbitrariedade da escolha de x, segue que

$$A \cup B \subset M \cup N.$$

08) : $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$.



Suponha que $A \subset B$.

A mostrar : $B^c \subset A^c$.

Por absurdo, suponha que $B^c \not\subset A^c$.

Então, $\exists\, x \in B^c$ tal que $x \notin A^c$

Mas ; $x \in B^c \Leftrightarrow x \notin B$ e $x \notin A^c \Leftrightarrow x \in A$

Temos então, que $x \in A$ e $x \notin B$, com $A \subset B$, um absurdo! Portanto $B^c \subset A^c$.

09) $(A \cup B)^c \overset{\subset}{\underset{\supset}{=}} A^c \cap B^c$:

$x \in (A \cup B)^c \iff x \notin A \cup B \iff x \notin A$ e $x \notin B \iff x \in A^c$ e $x \in B^c$

$\iff x \in A^c \cap B^c$

$\blacksquare$