CÁLCULO 1, T2.

18/06/24 – AULA 08

FUNÇÃO EXPONENCIAL:

Def.: Chama-se FUNÇÃO EXPONENCIAL a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = a^x, \quad \text{com} \quad a > 0 \quad e \quad a \neq 1.$$

(a chama-se base)

E por quê devemos exigir $a > 0$ e $a \neq 1$?

- se $a = 0$, então,

$$f(x) = 0^x = \begin{cases} 0; \text{ se } x \geq 0 \\ \nexists, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$ (pois teríamos uma divisão por zero)

- se $a = 1$; então

$f(x) = 1^x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, i.e., temos uma função constante, e não exponencial.

- se $a < 0$, então, f não tem sentido para $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, com p ímpar e q par.

Ex.: Tome $a = -2 < 0$, e considere

$$f(x) = (-2)^x.$$

Então, por exemplo: para $x = \frac{1}{2}$, teremos:

$$f(-\tfrac{1}{2}) = (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}.$$

Por isso, para que $f(x) = a^x$ esteja bem definida, devemos exigir que $a > 0$ e $a \neq 1$.

PROPOSIÇÃO: A função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

DEMONSTR.: Se $a > 1$; então;

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, então $\exists\, m > 0$ tal que

$$x + m = y$$

Disso;
$$a^y = a^{x+m} = a^x \cdot a^m;$$

e como $a > 1$, então $a^m > 1^m = 1$. Assim:

$$a^y = a^x \cdot \underbrace{a^m}_{>1} > a^x \cdot 1 = a^x,$$ ou seja,

$$\underbrace{a^x}_{= f(x)} < \underbrace{a^y}_{= f(y)} \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Logo; para $x < y$ mostramos que $f(x) < f(y)$, ou seja, f é crescente quando $a > 1$.

Se $0 < a < 1$, então $\frac{1}{a} > 1$. Disso;

$y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ é crescente. Então,

se $\alpha < \beta$, teremos $\left(\frac{1}{a}\right)^\alpha < \left(\frac{1}{a}\right)^\beta$, ou seja

$$\frac{1}{a^\alpha} < \frac{1}{a^\beta} \Rightarrow a^\alpha > a^\beta$$

tomando os inversos

Ou seja, considerando $f(x) = a^x$; com $0 < a < 1$, teremos:

$$\alpha < \beta \implies a^\alpha > a^\beta \iff f(\alpha) > f(\beta),$$

i.e., f é decrescente. $\square$

Note que, sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, temos que $\forall x \in \mathbb{R}$, $a^x > 0$. De fato,

$$\begin{cases} \text{se } x > 0,\ a^x > 0; \\ \text{se } x = 0,\ a^x = a^0 = 1 > 0 \\ \text{se } x < 0, \text{ então } -x > 0, \\ \quad \text{logo, } a^x = \dfrac{1}{a^{-x}} > 0 \end{cases}$$

Ou seja, $f(x) = a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

i.e., $Im(f) = (0, +\infty)$

O eixo horizontal $y = 0$, neste caso, separa o plano cartesiano em duas regiões: onde existe gráfico $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, e onde não existe gráfico: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$,

O eixo horizontal, $y = 0$, neste caso, chama-se uma ASSÍNTOTA HORIZONTAL.

ESBOÇO GRÁFICO: $y = a^x$, $a > 1$. (crescente)

Note que $f(x) = a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\implies Im(f) = (0, +\infty)$.

ASSÍNTOTA HORIZONTAL: $y = 0$

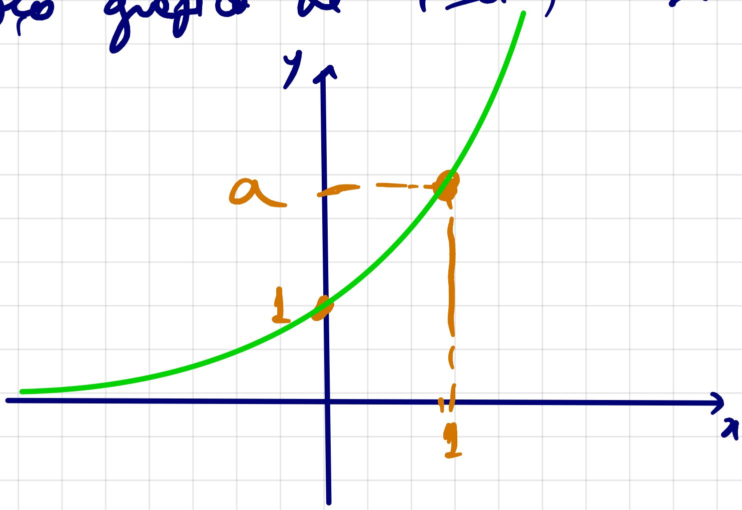
Além disso, $D(f) = \mathbb{R}$.

Além disso, considere o ponto

$f(0) = a^0 = 1 \implies (0, 1) \in$ gráfico de f.

x	$y = a^x$
0	$a^0 = 1$
1	$a^1 = a > 1$.

Esboço gráfico de $y = a^x$; $a > 1$:



No caso $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = a^x$, com $a \in (0,1)$;
i.e., <u>f decrescente</u>, teremos:

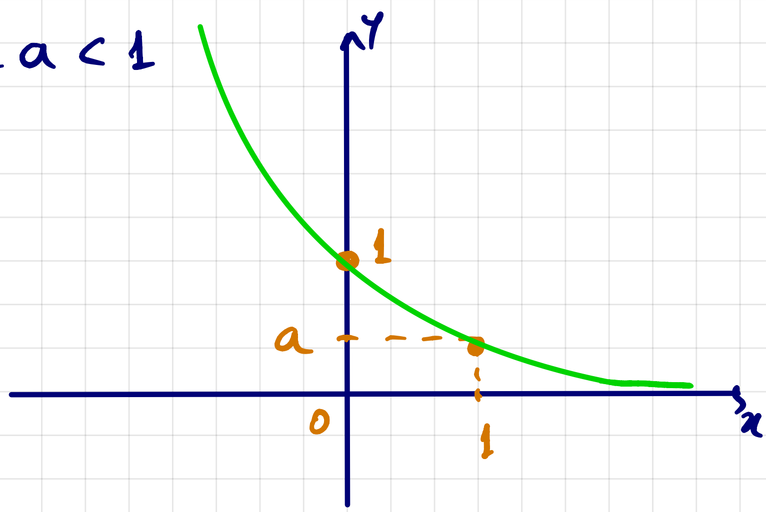
$f(x) = a^x > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}. \longrightarrow D(f) = \mathbb{R}.$

$\hookrightarrow Im(f) = (0, +\infty)$

x	$y = a^x$
0	$a^0 = 1$
1	$0 < a^1 = a < 1$

$0 < a < 1$

$y = 0$ – assíntota horizontal.



Vejamos alguns exemplos:

Esboce o gráfico das seguintes funções, indicando domínio e imagem:

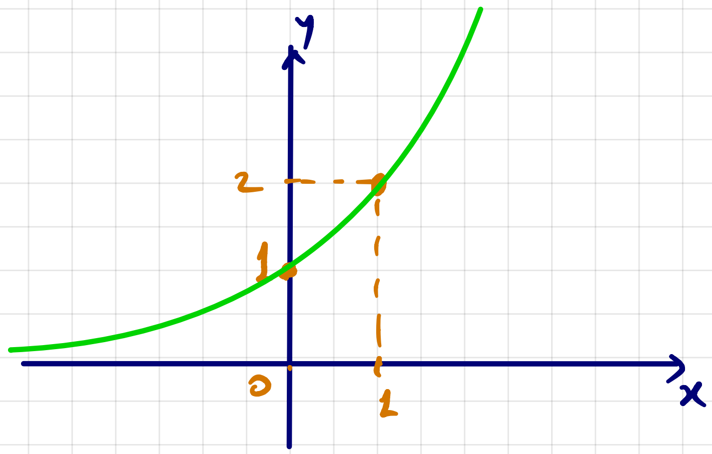
(a) $f(x) = 2^x$

Solução: $a = 2 > 1$; f é crescente.

$y = 2^x > 0, \ \forall x$. $\quad Im(f) = (0, +\infty)$

$\rightarrow D(f) = \mathbb{R}$.

x	$y = 2^x$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$



02) $f(x) = 2^{1-x}$.

$y = 2^{1-x} = 2^1 \cdot 2^{-x} = 2 \cdot \frac{1}{2^x} > 0 \Rightarrow y > 0$, i.e.; $Im(f) = (0, +\infty)$

$1 - x \in \mathbb{R}$; i.e.; $D(f) = \mathbb{R}$.

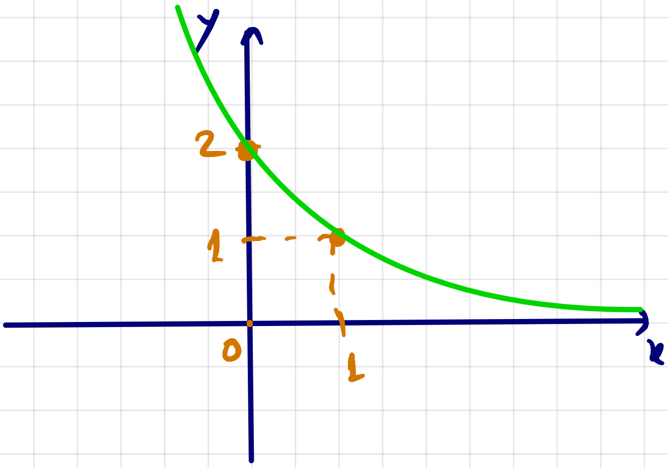
x	$y = 2^{1-x}$
0	$2^{1-0} = 2$
1	$2^0 = 1$

Note que f é decrescente, pois

$y = 2^{1-x} = 2 \cdot \frac{1}{2^x} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

$\Downarrow$

$0 < a = \frac{1}{2} < 1$.



03) $f(x) = 1 - 2^{3-2x}$.

$y = 1 - 2^{3-2x}$

$y - 1 = -2^{3-2x} \quad \times(-1)$

$1 - y = \underbrace{2^{3-2x}}_{} > 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - y > 0$

$\Rightarrow -y > -1$

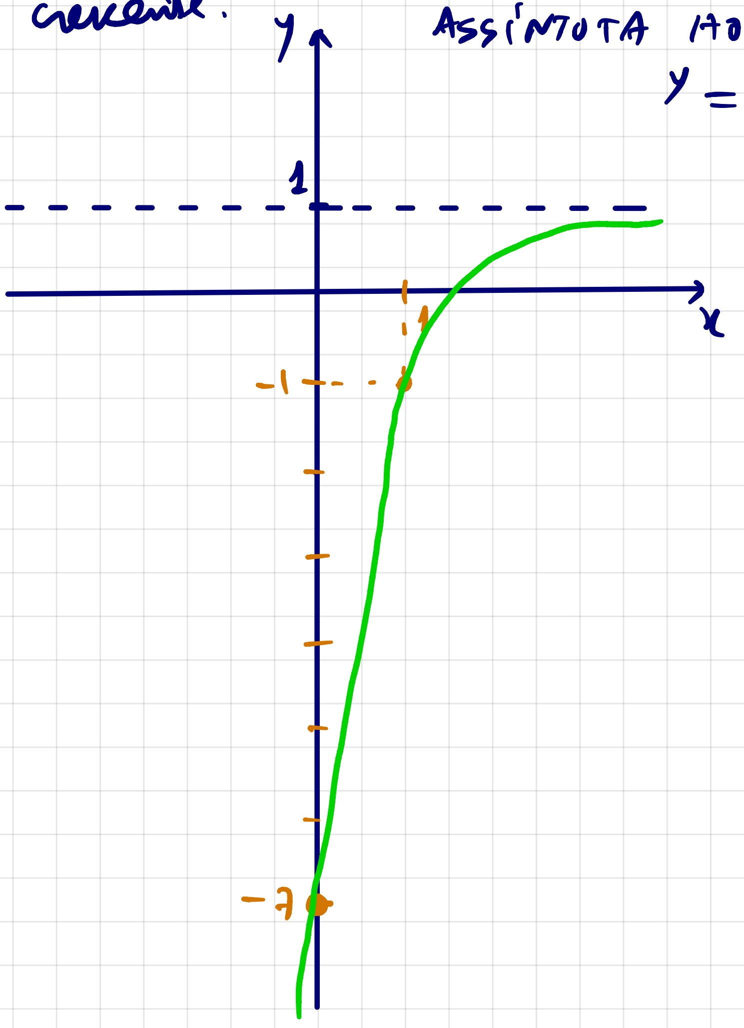
$\Rightarrow y < 1.$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = (-\infty, 1).$

x	$y = 1 - 2^{3-2x}$
0	$1 - 2^3 = -7$
1	$1 - 2^1 = -1$

} crescente.

ASSÍNTOTA HORIZONTAL: $y = 1$.



04) $f(x) = |1 - 2^{x+1}|$

1º: considere $\tilde{f}(x) = y = 1 - 2^{x+1}$. (sem o módulo)

$$y - 1 = -2^{x+1} \quad \times(-1)$$

$$1 - y = \underbrace{2^{x+1}} > 0 \Rightarrow 1 - y > 0$$

$$-y > -1$$

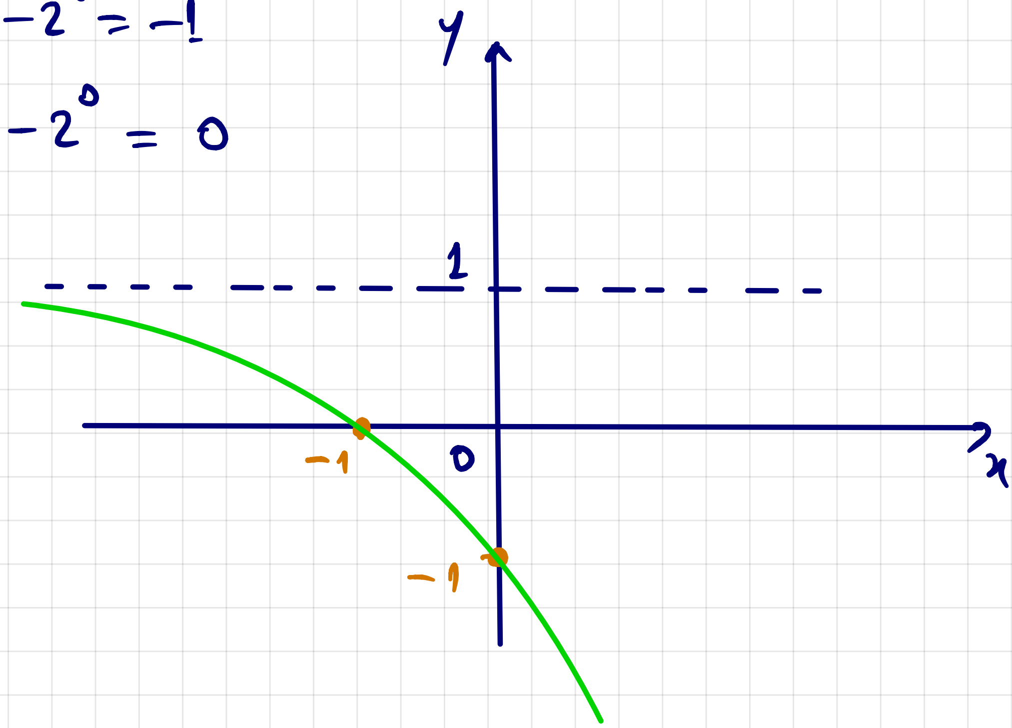
$$y < 1.$$

$D(f) = \mathbb{R}$, pois não há restrição para a variável independente x.

$Im(\tilde{f}) = (-\infty, 1)$

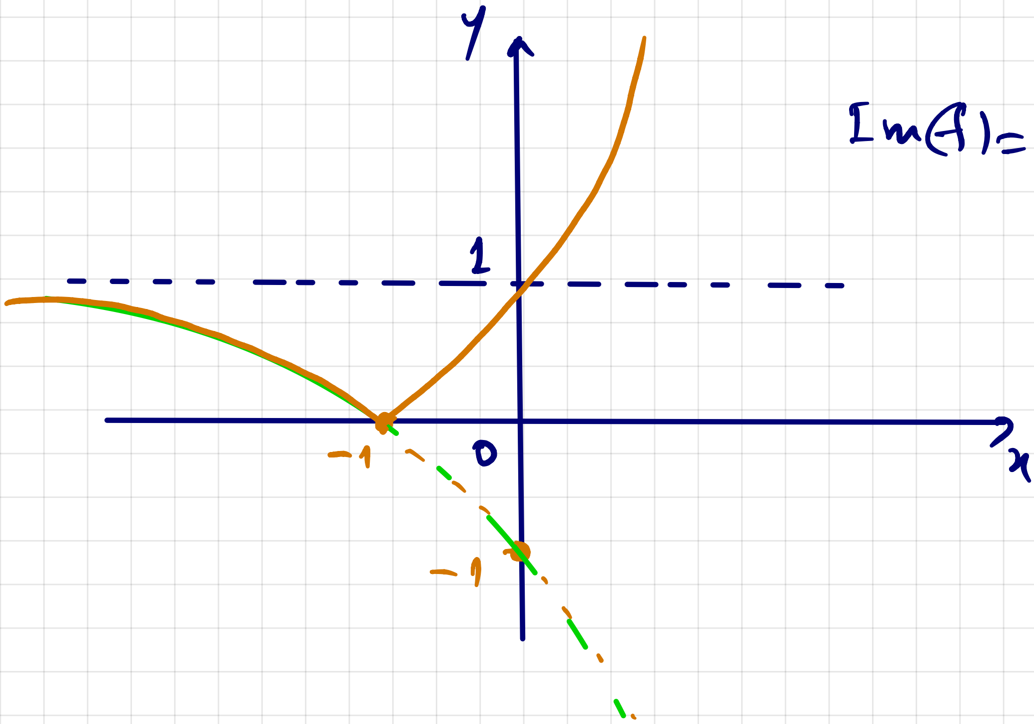
ASSÍNTOTA HORIZ.: $y = 1$.

x	$y = 1 - 2^{x+1}$
0	$1 - 2^1 = -1$
-1	$1 - 2^0 = 0$



2º: $y = |1 - 2^{x+1}|$ (com o módulo)

Basta "passar o módulo" no esboço gráfico anterior. Assim, teremos:



$Im(f) = [0, +\infty)$

05) $f(x) = 2^{|1-x|}$.

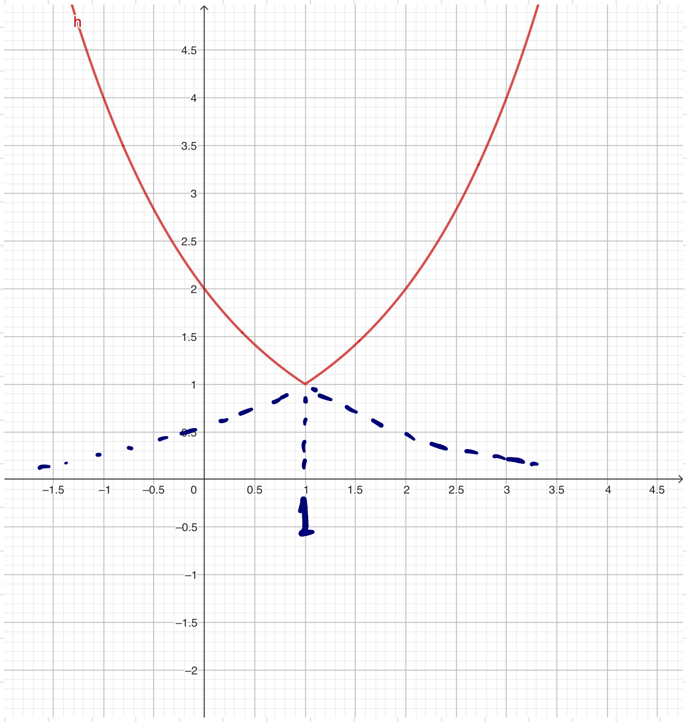
Note que $|1-x| = \begin{cases} 1-x, & \text{se } 1-x \geq 0 \\ -(1-x), & \text{se } 1-x < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow |1-x| = \begin{cases} 1-x, & \text{se } x \leq 1 \\ x-1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$

Assim, teremos.

$$f(x) = 2^{|1-x|} = \begin{cases} 2^{1-x}, & \text{se } x \leq 1 \\ 2^{x-1}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Fica como exercício seu esboço gráfico.
Pelo geogebra, encontramos:



LÍSTA 02. QUESTÃO 11:

11. As bactérias em um recipiente se reproduzem de forma tal que o aumento do seu número em um intervalo de tempo de comprimento fixo é proporcional ao número de bactérias presentes no início do intervalo. Suponhamos que, inicialmente, haja 1000 bactérias no recipiente e que, após 1 hora, este número tenha aumentado para 1500. Quantas bactérias haverá cinco horas após o início do experimento?

$n = n(t)$

$n_0 = 1000$ bactérias ; $t = 0$

$t = 1$: $n(1) = 1500$

$t = 5h$. $n(5) = ?$

Em 1h passou de 1000 para 1500 ; ou seja, aumentou 50%.

$t = 0 \Rightarrow n = 1000$

$t = 1 \Rightarrow n(1) = 1000 + \frac{50}{100} 1000 = 1500$

$t = 2 \Rightarrow$

$$m(2) = 1000 + \frac{50}{100} \cdot 1000 + \frac{50}{100}\left(1000 + \frac{50}{100} 1000\right)$$

$$= \left(1000 + \frac{50}{100} 1000\right) \cdot \left(1 + \frac{50}{100}\right)$$

$$= 1000\left(1 + \frac{50}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{50}{100}\right)$$

$$= 1000 \cdot \left(1 + \frac{50}{100}\right)^2$$

generalizando:

$$m(t) = 1000\left(1 + \frac{50}{100}\right)^t$$

$$= 1000\left(1 + \frac{1}{2}\right)^t = 1000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t$$

$$\boxed{m(t) = 1000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t}$$ (função exp., com base $a = \frac{3}{2} > 1$)

$$m(5) = 1000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 = 1000 \cdot \frac{243}{32} = 7593{,}75$$ bactérias