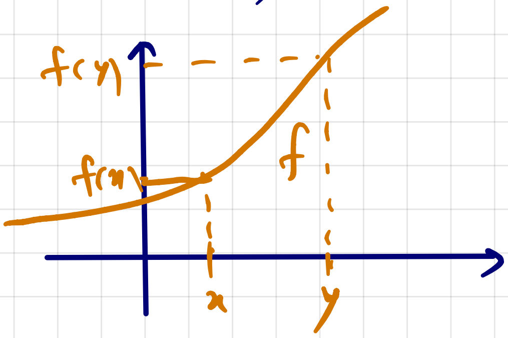
CÁLCULO 1, T1.

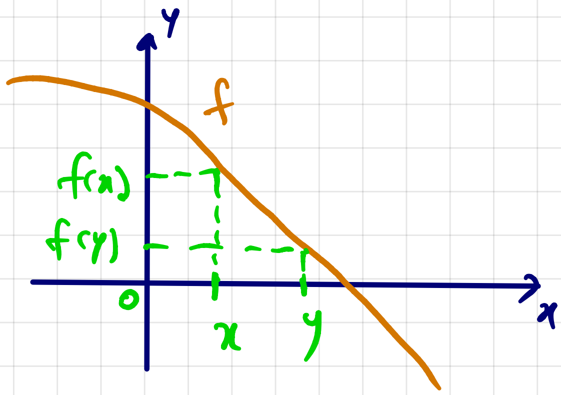
AULA 07 – 13/06/24

Ainda, seguindo uma rápida revisão; do estudo de funções, temos que $f: A \to B$ é uma função crescente se, e somente se, $\forall x, y \in A$; $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.



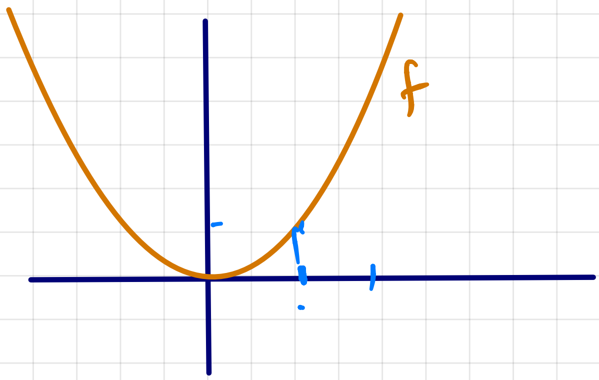
$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$

$f: A \to B$ é dita decrescente se, e somente se, $\forall x, y \in A$; $x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$.



$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Note que existem funções que não são nem crescentes e nem decrescentes. Ex.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$



Definimos o conceito de zero de uma função: onde o seu gráfico intercepta o eixo horizontal. Ou seja, são os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = 0$

Isto é, para determinar os zeros de uma função precisamos resolver a equação $f(x) = 0$, ou seja, obter as raízes desta equação.

Estudamos, também as funções afim e quadrática (iniciamos o estudo desta última).

FUNÇÃO AFIM: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$

- $b = 0$, chama-se função linear;
- $a = 0$, chama-se função constante.

O gráfico da função afim é uma linha reta. Além disso, $y = ax+b$ é crescente se $a>0$ e decrescente se $a<0$.

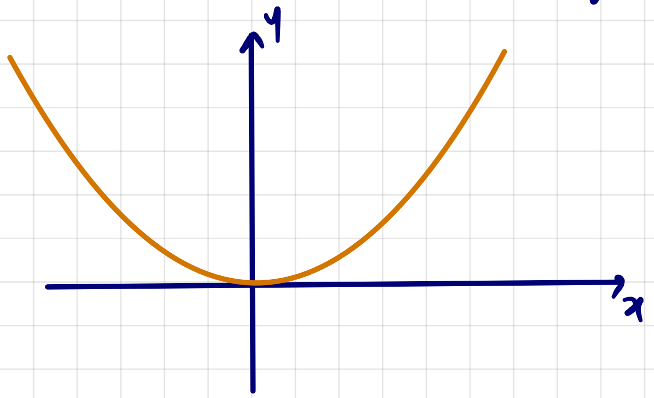
zeros: onde $f(x) = 0 \iff ax+b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}$.

FUNÇÃO QUADRÁTICA: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

zeros: onde $f(x) = 0 \iff ax^2+bx+c = 0$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; \\ x = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{cases}$$

O caso simples de função quadrática foi visto na aula 05: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2$; $a > 0$. onde deduzimos que seu esboço gráfico é dado por:



CASO GERAL: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

zeros: $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Define o vértice $V(x_V, y_V)$; onde x_V; chamada de abscissa do vértice, é o ponto médio entre os zeros de f. Ou seja;

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}{2}$$

$$= \frac{\frac{-b + \cancel{\sqrt{b^2 - 4ac}} - b - \cancel{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{2a}}{2}$$

$$= \frac{-2b}{2a} \times \frac{1}{2} = -\frac{b}{2a}$$

$$\boxed{x_V = -\frac{b}{2a}}$$

y_V – ordenada do vértice.

$$y_V = f(x_V) = a \cdot x_V^2 + b \cdot x_V + c$$

$$= a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$= \cancel{a} \cdot \frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

$$= - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = - \frac{\Delta}{4a} \; ; \text{ onde}$$

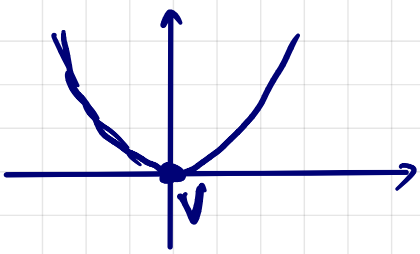
$\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante.

Ou seja, $V(x_V, y_V) = V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

No caso simples; $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = ax^2$

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot a} = 0$$

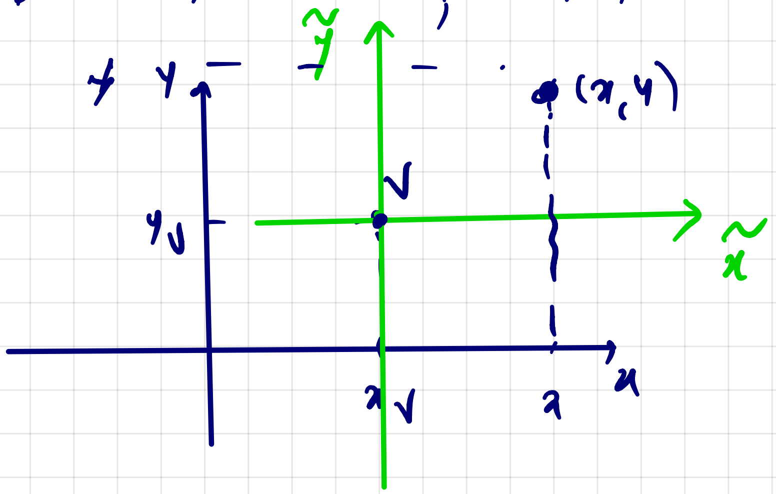
$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{0-0}{4a} = 0$$



(Fim da Revisão)

CONTEÚDO NOVO:

Dada $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$



Introduza um novo sistema de coordenadas $\tilde{x}\tilde{y}$, com origem no vértice da parábola, c.f. esquema ao lado.

Para isto, vamos escrever, para $(x,y) \in$ gráfico de f, temos:

$$\begin{cases} x = x_V + \tilde{x} = -\dfrac{b}{2a} + \tilde{x} \\ y = y_V + \tilde{y} = -\dfrac{\Delta}{4a} + \tilde{y} \end{cases}$$

Então: de $y = ax^2 + bx + c$, temos:

$$-\frac{\Delta}{4a} + \tilde{y} = a\cdot\left(-\frac{b}{2a} + \tilde{x}\right)^2 + b\cdot\left(-\frac{b}{2a} + \tilde{x}\right) + c$$

$$-\frac{\Delta}{4a} + \tilde{y} = a\cdot\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{2b}{2a}\tilde{x} + \tilde{x}^2\right) - \frac{b^2}{2a} + b\tilde{x} + c$$

$$-\frac{\Delta}{4a} + \tilde{y} = \frac{b^2}{4a} - \cancel{b\tilde{x}} + a\tilde{x}^2 - \frac{b^2}{2a} + \cancel{b\tilde{x}} + c$$

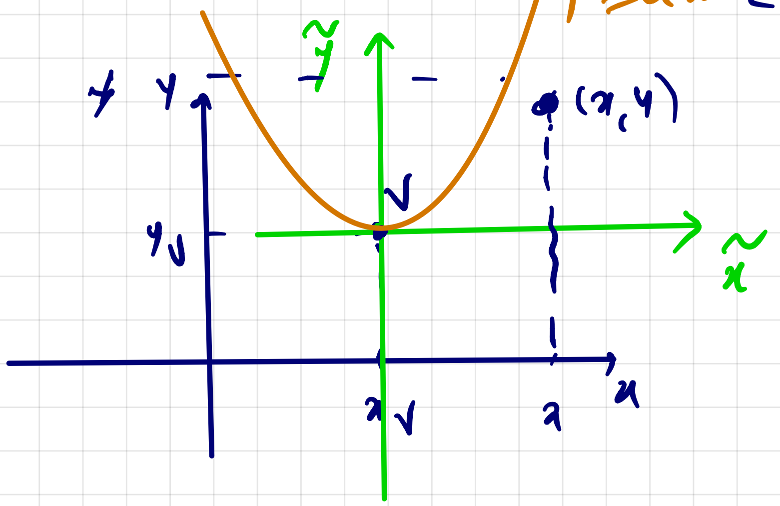
$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} + \tilde{y} = \frac{b^2}{4a} + a\tilde{x}^2 - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$-\frac{b^2}{4a} + \cancel{c} + \tilde{y} = \frac{b^2}{4a} + a\tilde{x}^2 - \frac{b^2}{2a} + \cancel{c}$$

$$\tilde{y} = \cancel{\frac{b^2}{4a}} + a\tilde{x}^2 - \cancel{\frac{b^2}{2a}} + \cancel{\frac{b^2}{4a}}$$

$$\tilde{y} = a\tilde{x}^2 \quad \text{no plano } \tilde{x}\tilde{y}$$

$\tilde{y} = a\tilde{x}^2 \iff y = ax^2 + bx + c$



Vimos, no simples que, se $a > 0$, $y = ax^2$ possui concavidade voltada para cima, e se $a < 0$, então $y = ax^2$ possuirá concavidade voltada para baixo. Isto continuará valendo no caso geral.

Na prática, para esboçar o gráfico de uma função quadrática, procedemos como o seguinte exemplo:

Ex: $y = x^2 - 6x + 8$. gráfico?

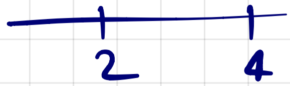
Solução: zeros: $y = 0$:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\iff x = \frac{+6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2.1}$$

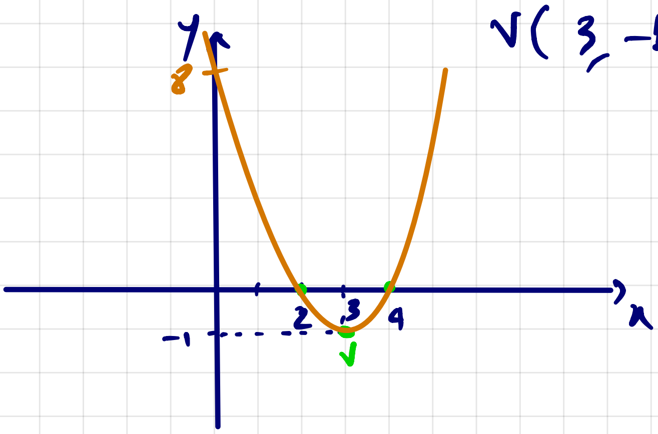
$$\iff x = \frac{6 \pm 2}{2} \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

VÉRTICE:



$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2.1} = 3$$

$$y_v = f(x_v) = (3)^2 - 6.(3) + 8 = 9 - 18 + 8 = -1.$$

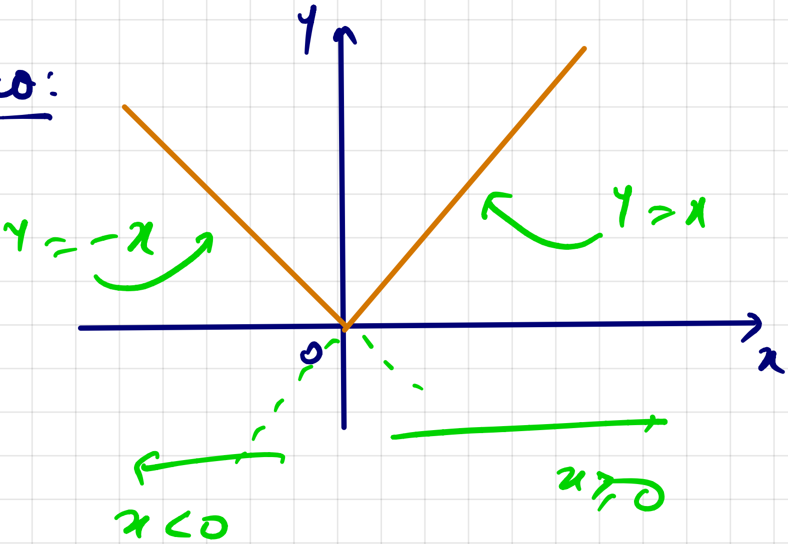


$V(3, -1)$

Def.: Chama-se função modular a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

gráfico:



Vejamos alguns exemplos variantes, envolvendo o módulo:

01) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |2 - x|$. gráfico?

Solução:

$$f(x) = |2-3x| = \begin{cases} 2-3x, & \text{se } 2-3x \geq 0 \\ -(2-3x), & \text{se } 2-3x < 0 \end{cases}$$

$-3x \geq -2$

$x \leq \frac{2}{3}$

$$= \begin{cases} 2-3x, & \text{se } x \leq \frac{2}{3} \\ -2+3x, & \text{se } x > \frac{2}{3} \end{cases}$$

$y = 2-3x$

x	y
0	2
1	-1

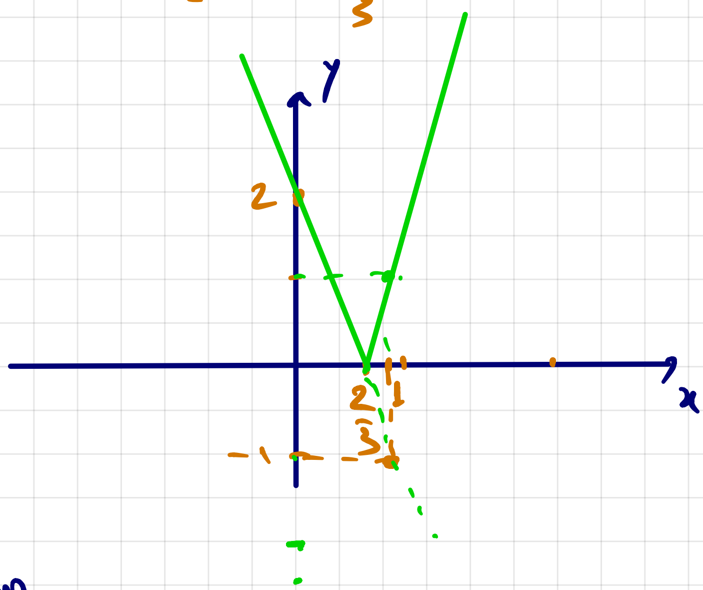
$2-3x=0$

$\Leftrightarrow 3x = 2$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

$y = -2+3x$

x	y
0	-2
1	1



$D(f) = \mathbb{R}$.

$Im(f) = [0, +\infty)$

02) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2 - 4 \cdot |x| + 3$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 - 4(-x) + 3, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 3, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

- $y = x^2 - 4x + 3 \quad (x \geq 0)$:

zeros: $y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \begin{array}{l} \nearrow x = 3 \\ \searrow x = 1. \end{array}$$

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2 \cdot 1} = 2$$

$$y_V = f(x_V) = (2)^2 - 4 \cdot (2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1.$$

$$V(2, -1)$$

- $y = x^2 + 4x + 3$, $(x < 0)$

zeros: $y = 0 \Leftrightarrow x^4 + 4x + 3 = 0$

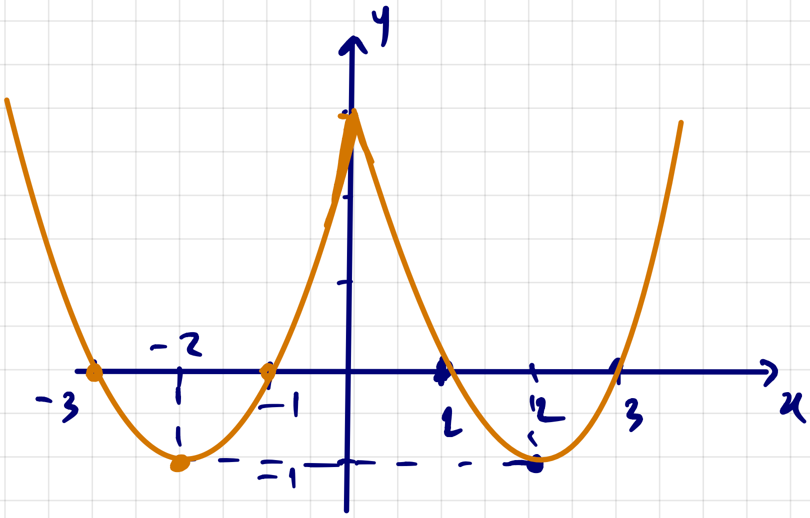
$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2 \cdot 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 2}{2} \quad \begin{array}{l} \nearrow x = -1 \\ \searrow x = -3 \end{array}$$

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2$$

$$y_v = f(x_v) = (-2)^2 + 4(-2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

$$V = (-2, -1)$$

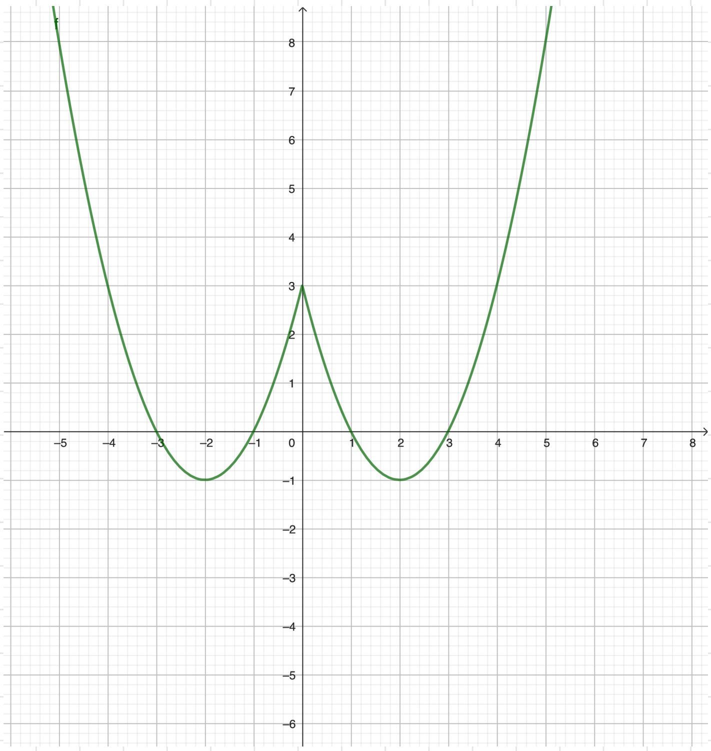


$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = [-1, +\infty)$

PLOTAGEM GRÁFICA DE f

USANDO O GEOGEBRA.



03) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = |x-1| + |2x+4|$.

gráfico? $\quad D(f) = ?$ $\quad Im(f) = ?$

<u>solução</u>: Note que:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x-1 \geq 0 \to x \geq 1 \\ -(x-1), & \text{se } x-1 < 0 \to x < 1 \end{cases}$$

e

$$|2x+4| = \begin{cases} 2x+4, & \text{se } 2x+4 \geq 0 \to x \geq -2 \\ -(2x+4), & \text{se } 2x+4 < 0 \to x < -2 \end{cases}.$$

ou seja;

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

+

$$|2x+4| = \begin{cases} 2x+4, & \text{se } x \geq -2 \\ -2x-4, & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

$x < 1$, $x < -2$ $\quad$ | $\quad$ $x \geq -2$, $x < 1$ $\quad$ | $\quad$ $x \geq 1$:

-2 $\quad\quad$ 1

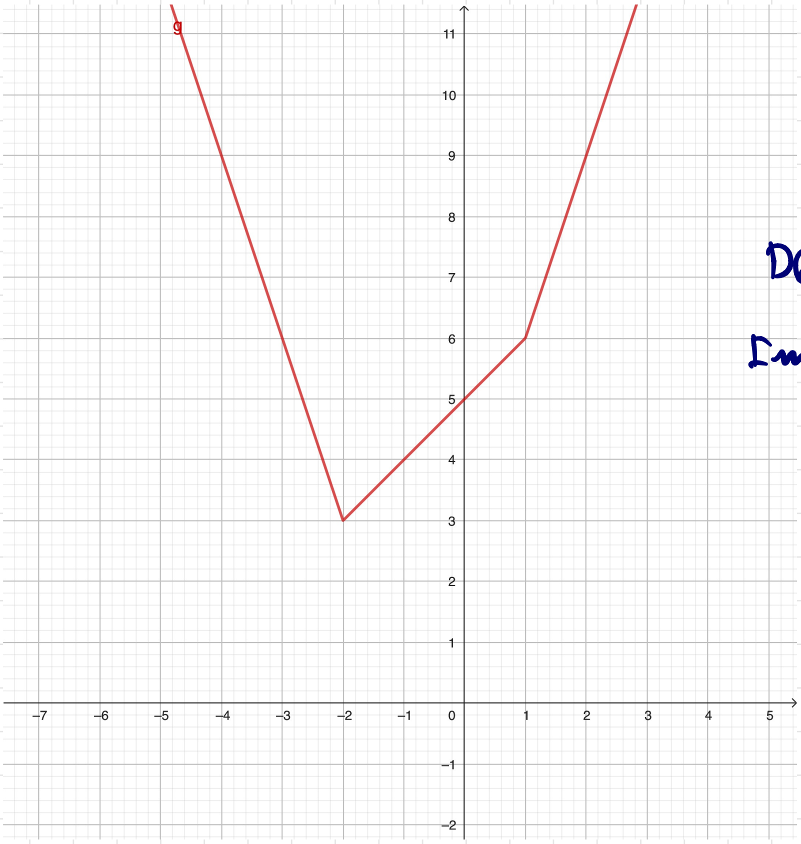
$|x-1| + |2x+4|$
$= -x+1-2x-4$
$= -3x-3$

$|x-1| + |2x+4|$
$= -x+1+2x+4$
$= x+5$

$|x-1| + |2x+4| =$
$x-1+2x+4 =$
$3x+3$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} -3x+3, & \text{se } x < -2 \\ x+5, & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ 3x+3, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

(etc...) – fica como exercício montar o seu esboço gráfico. Pelo geogebra teremos o resultado:



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = [3, +\infty)$