CÁLCULO 1, TURMA T_1.

11/06/24 - AULA 06

- RETORNO DAS ATIVIDADES, APÓS PERÍODO DE SUSPENSÃO DAS AULAS -

Uma revisão do que estudamos:

wp.ufpel.edu.br/zahn

Até então estudamos:

- CONJUNTOS E CONJUNTOS NUMÉRICOS
- $\mathbb{R}$ COMO UM CORPO ORDENADO E COMPLETO.
- FUNÇÕES (CONCEITO, OPERAÇÕES, COMPOSIÇÃO, INJETIVIDADE, SOBREJETIVIDADE, BIJETIVIDADE, FUNÇÕES CRESCENTES E DECRESCENTES, FUNÇÃO AFIM E FUNÇÃO QUADRÁTICA)

Um conjunto é uma coleção de objetos.

relacionar elemento com conj.: $\in$

relacionar conjuntos: $\subset$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

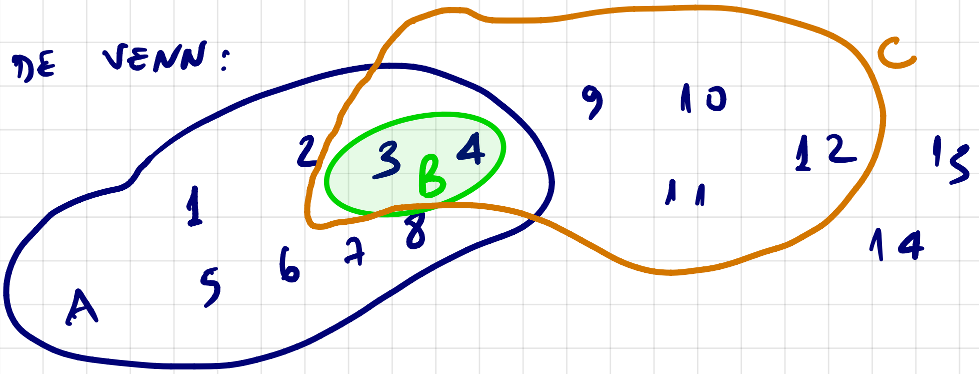
Ex.: $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 8\}$.

$15 \notin A$, $7 \in A$.

$B = \{x \in \mathbb{N} : 2 < x \leq 4\}$. Então: $B \subset A$.

$C = \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x \leq 12\}$. Então: $B \subset C$ mas $A \not\subset C$

DIAGRAMA DE VENN:



Lembre que $B \subset A \iff (\forall x \in B \Rightarrow x \in A)$

$B \not\subset A \iff \exists x \in B$ tal que $x \notin A$.

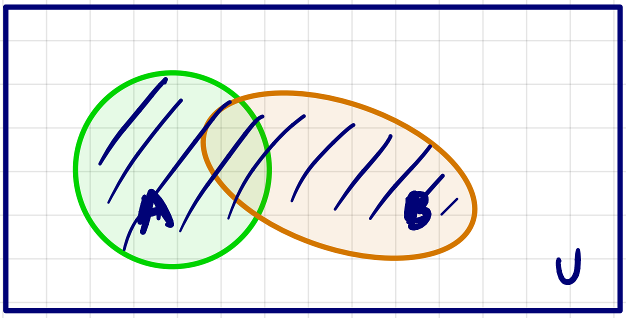
O conj. vazio: $\emptyset$ - conj. que não possui elemento algum. Vimos que:

$\forall A \subset U$, - conjunto universo.

tem-se que $\emptyset \subset A$. De fato, se por absurdo, tivermos que $\emptyset \not\subset A$, então, $\exists x \in \emptyset$ tal que $x \notin A$. Mas $x \in \emptyset$ viola o conceito de conj. vazio; ou seja, tem-se um absurdo! Portanto, $\emptyset \subset A$.

<u>operações com conjuntos:</u>

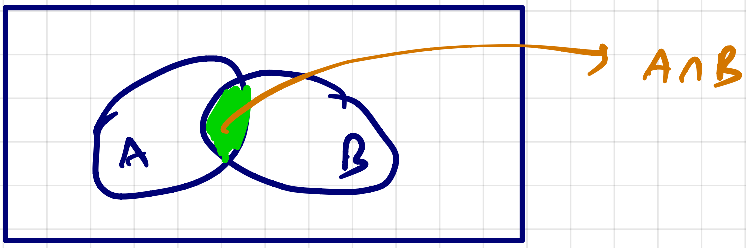
- $A \cup B = \{x \in U : x \in A$ ou $x \in B\}$



A∪B está sombreado.

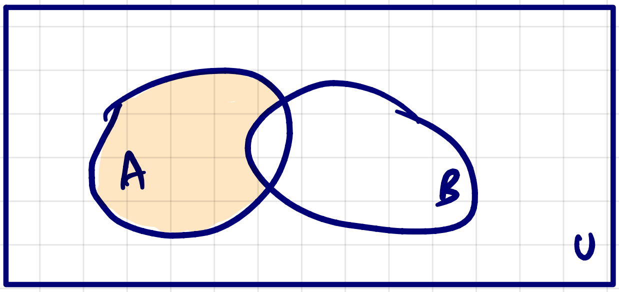
Note que $x \notin A \cup B \iff x \notin A$ e $x \notin B$.

- $A \cap B = \{x \in U : x \in A$ e $x \in B\}$.



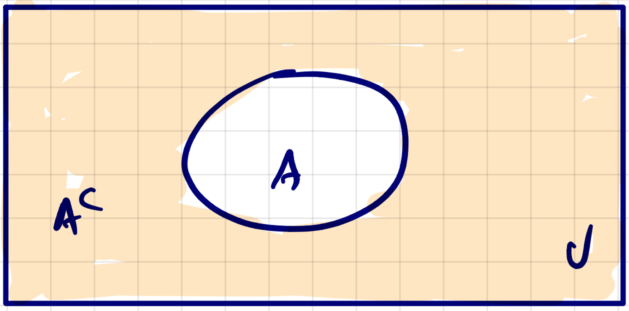
Note que $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$ ou $x \notin B$.

- $A \setminus B = A - B = \{x \in U : x \in A$ e $x \notin B\}$.



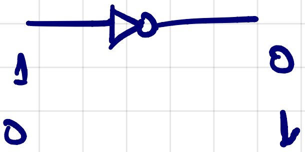
$x \notin A \setminus B \Leftrightarrow x \notin A$ ou $x \in B$.

- $A^c = \{x \in U : x \notin A\}$



$x \notin A^c \Leftrightarrow x \in A$.

Note que A^c e' idempotente: $(A^c)^c = A$



Conjuntos numéricos:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{N}\}$.

Em $\mathbb{Q}$ definimos as operações:

$$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$\left(\frac{a}{b}, \frac{m}{n}\right) \longmapsto \frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{an + bm}{b.n}$$

$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$\left(\frac{a}{b} ; \frac{m}{n}\right) \longmapsto \frac{a.m}{b.n}$$

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ é um corpo pois cumpre as propriedades: aditivas, multiplicativas e distributiva, c.f. visto na aula 02.

Também existe a relação de ordem em $\mathbb{Q}$:

$$a \leq b \iff \exists\, m \geq 0 \text{ tal que } a + m = b.$$

Porém, vimos que $\mathbb{Q}$ é insuficiente no sentido de que, por exemplo, existem números racionais cuja raiz quadrada não é racional.

Provamos em aula, por absurdo, que $\sqrt{2} \notin \mathbb{R}$.

O completamento de $\mathbb{Q}$ é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, e é dado por

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

↪ conj. dos irracionais

↑

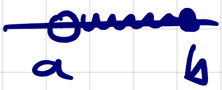
"buracos" na reta

$\sqrt{2}$; π ; $\ln 2$; etc

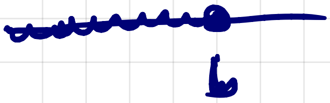
Em $\mathbb{R}$ definimos intervalos. Por exemplo:

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$



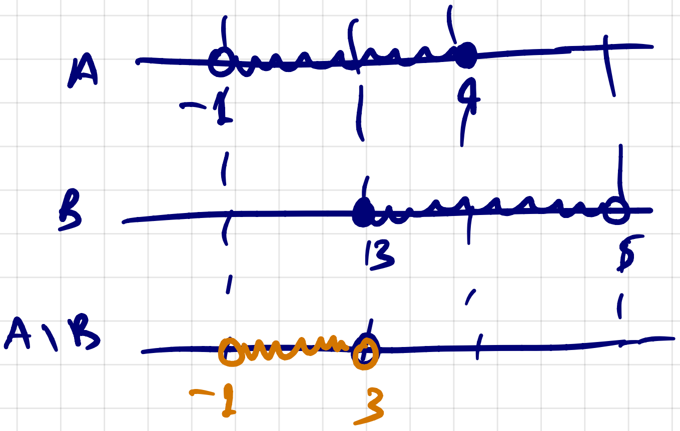
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$



et cetera.

EXEMPLO: $A = (-1, 4]$; $B = [3, 5)$

$A \setminus B = ?$



Outro conceito importante estudado foi a noção de módulo de um número real:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{ou}$$

ainda:

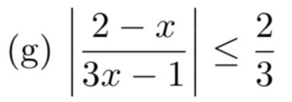
$$|x| = \text{máx.}\{x, -x\}.$$

Ex: $\left|-\frac{3}{5}\right| = \text{máx.}\left\{-\frac{3}{5}, -\left(-\frac{3}{5}\right)\right\} = \text{máx.}\left\{-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right\} = \frac{3}{5}$.

Propriedades importantes do módulo:

- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$; $(y \neq 0)$
- $|x+y| \le |x| + |y|$ (desigualdade triangular)
- $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a.$
- $|x| \geq a \Leftrightarrow x \le -a$ ou $x \geq a.$

LISTA 01. 02-g):



(g) $\left|\frac{2-x}{3x-1}\right| \le \frac{2}{3}$

SOLUÇÃO:

$$\left|\frac{2-x}{3x-1}\right| \le \frac{2}{3} \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{2}{3} \le \mathrlap{\overbrace{\phantom{\frac{2-x}{3x-1} \le \frac{2}{3}}}^{(I)}}\frac{2-x}{3x-1}}_{(II)} \le \frac{2}{3}.$$

(I): $$\frac{2-x}{3x-1} \le \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2-x}{3x-1} - \frac{2}{3} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3.(2-x) - 2.(3x-1)}{3(3x-1)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{6-3x-6x+2}{3.(3x-1)} \le 0$$

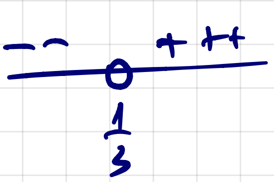
$$\Leftrightarrow \frac{-9x+8}{3(3x-1)} \le 0 \quad \times 3 \quad \Leftrightarrow \boxed{\frac{8-9x}{3x-1} \le 0}$$

SINAL DO NUMERADOR: $8-9x = 0 \Leftrightarrow 9x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{9}$

$+ + + \;|\; - - -$ (em $\frac{8}{9}$)
$$\begin{cases} \forall x < \frac{8}{9} \Rightarrow 9x < 8 \Rightarrow 8-9x > 0 \\ \forall x > \frac{8}{9} \Rightarrow 9x > 8 \Rightarrow 8-9x < 0 \end{cases}$$

SINAL DO DENOMINADOR: $3x-1=0$ $(\neq 0)$

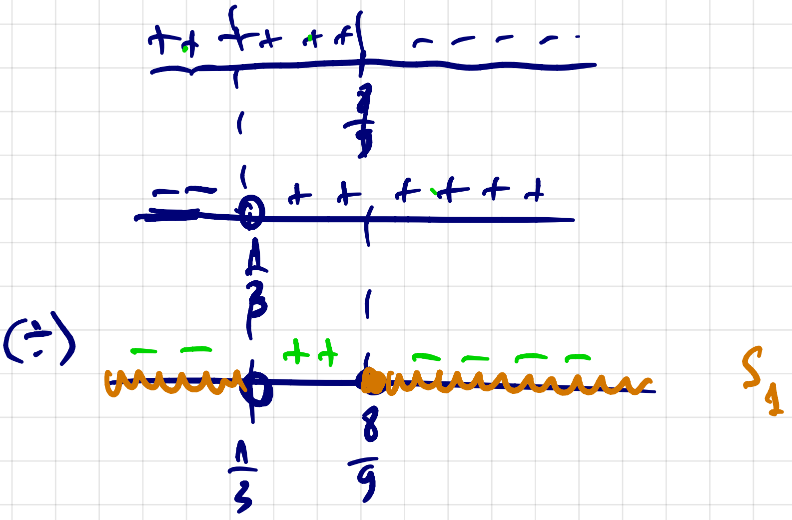
$3x-1=0 \Leftrightarrow 3x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$



$\forall x<\frac{1}{3} \Rightarrow 3x<1 \Rightarrow 3x-1<0$

$\forall x>\frac{1}{3} \Rightarrow 3x>1 \Rightarrow 3x-1>0$

$\frac{8}{9} > \frac{1}{3}\times\frac{3}{3} = \frac{3}{9}$

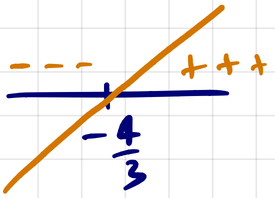


(II): $-\frac{2}{3} \leq \frac{2-x}{3x-1} \Leftrightarrow \frac{2-x}{3x-1}+\frac{2}{3} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{3.(2-x)+2.(3x-1)}{3(3x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{6-3x+6x-2}{3.(3x-1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{3x+4}{3(3x-1)} \geq 0}$$

ZEROS DO NUMERADOR: $3x+4=0 \Leftrightarrow 3x=-4 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}$



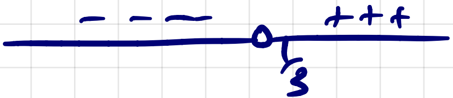
$y=3x+4$

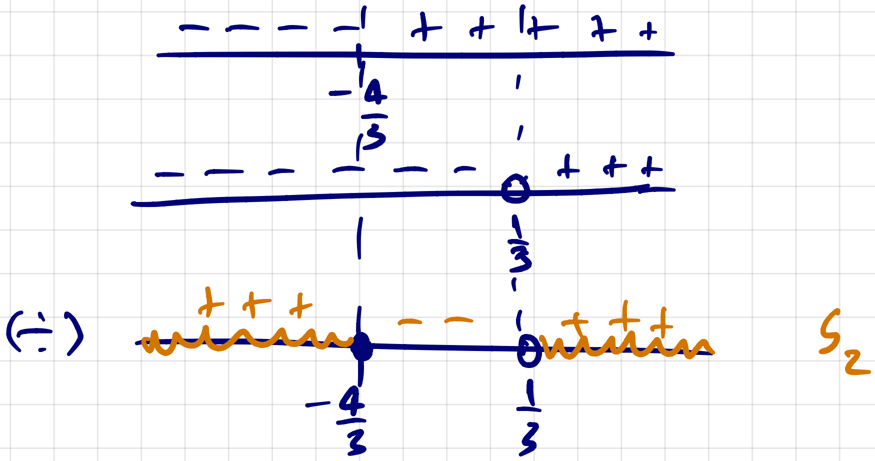
(FUNÇÃO AFIM CRESCENTE)

↓

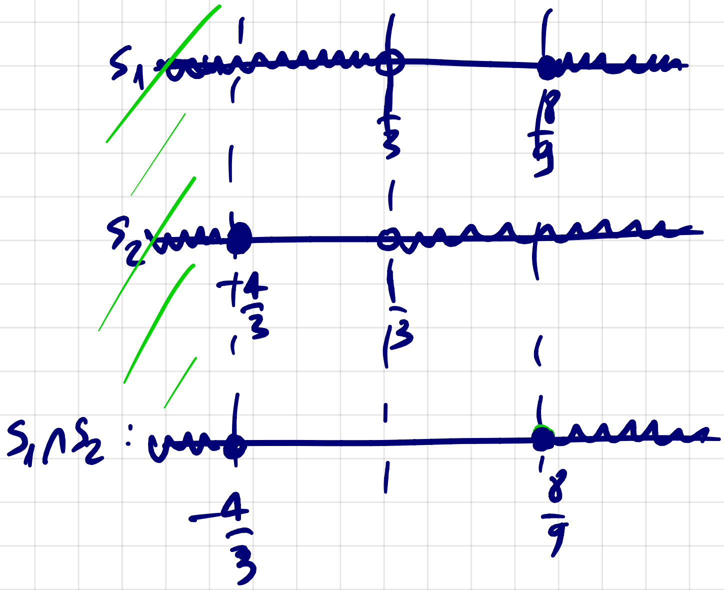
$a=3>0.$

ZEROS DO DENOMINADOR: (feito no caso I):





Então, a solução S será: $S = S_1 \cap S_2$:



$$S = \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, +\infty\right)$$

* * *

FUNÇÃO: $A, B \neq \emptyset$. Uma função $f: A \to B$ é uma regra que manda TODOS os elementos de A para elementos de B, de maneira única.

A : DOMÍNIO DE f ; B = CONTRADOMÍNIO ; $f(A)$ = Imagem de f.

EX: $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-3x}}{x^2-4x} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

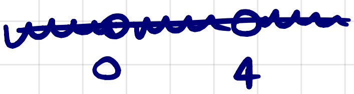
Qual é o domínio A de f?

Vejamos as condições de existência de f:

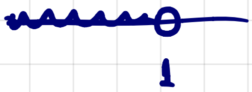
- $2-3x \geq 0$
- $x^2-4x \neq 0$
- $1-x > 0$

- $2-3x \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -2 \Leftrightarrow 3x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$.

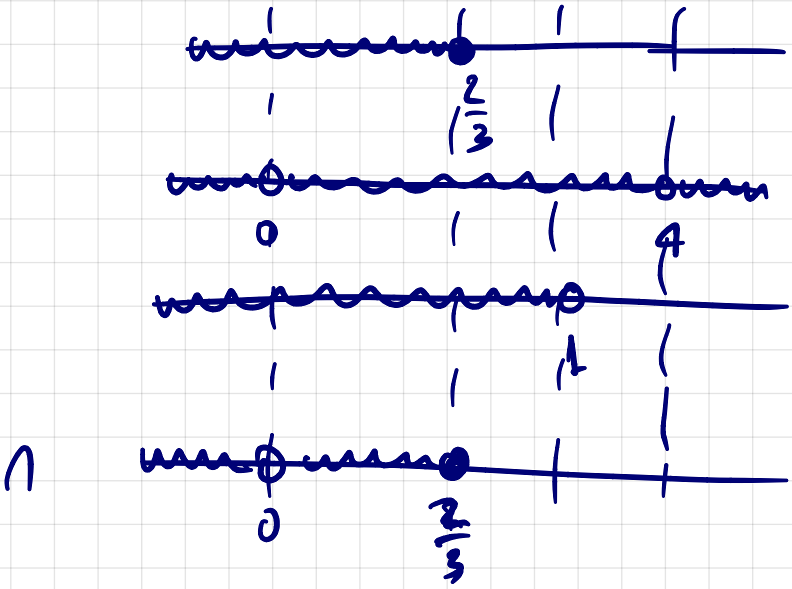
- $x^2-4x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-4) \neq 0 . \Leftrightarrow x \neq 0$ ou $x \neq 4$.



- $1-x > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1$.



Por fim, o domínio A será dado pela interseção de todas as condições de existência:



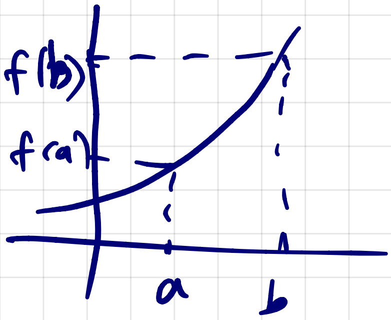
$D(f) = A = (-\infty, \frac{2}{3}] \setminus \{0\}$.

DEFINIÇÕES:

- $f: A \to B$ é injetiva $\overset{def.}{\iff}$ $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

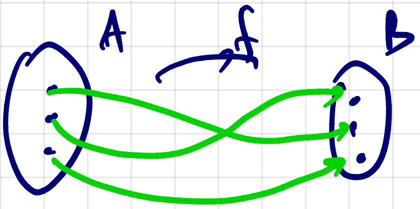
  ou

  $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$



- $f: A \to B$ é sobrejetiva $\overset{def.}{\iff}$ $f(A) = B$ ou ainda:

  $\forall z \in B, \exists x \in A$ tal que $f(x) = z$.



- $f: A \to B$ é bijetiva $\overset{def.}{\iff}$ for injetiva e sobrejetiva.