CÁLCULO 1, T1

27/06/24 – AULA 11

MONITOR CÁLCULO 1 (GAMA) → 3º andar.
↳ AUGUSTO. (segundas, terças e quartas)
(13h às 17h)

Continuando o estudo da trigonometria; vimos no final da aula passada a relação entre grau e radiano:

$$180° \text{ --- } \pi \text{ rad.}$$

Assim, por exemplo, 45° corresponde a quantos radianos?

$$180° \text{ --- } \pi \text{ rad.}$$
$$45° \text{ --- } x$$

$$x = \frac{45° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

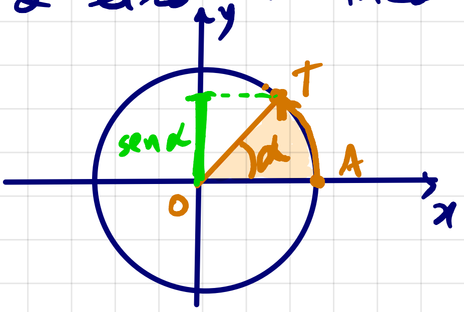
Logo, 45° corresponde a $\frac{\pi}{4}$ rad.

Números trigonométricos no ciclo:

Def.: Seja $\alpha = \overset{\frown}{AT}$ arco qualquer no ciclo trigonométrico.

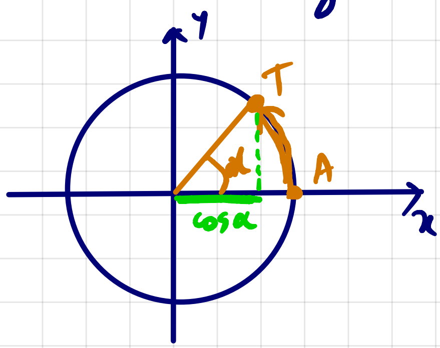
Definimos:

- $\text{sen}\,\alpha$ é a projeção do lado terminal do arco $\overset{\frown}{AT}$ sobre o eixo vertical.



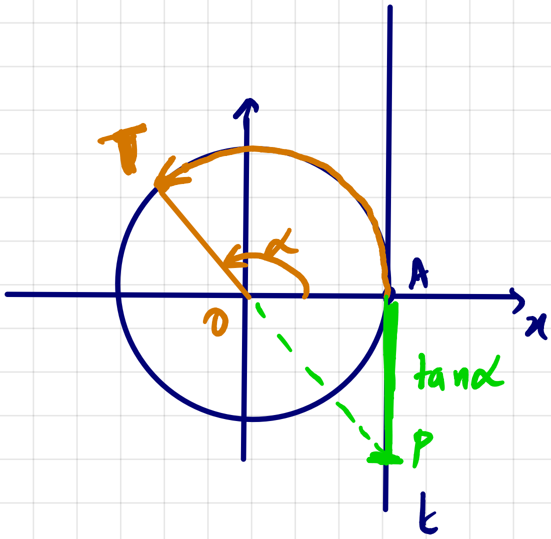
$\text{sen}\,\alpha = \text{proj}_{oy}\,\overline{OT}$

- $\cos\alpha$ é a projeção do lado terminal do arco $\widehat{AT}$ sobre o eixo horizontal.



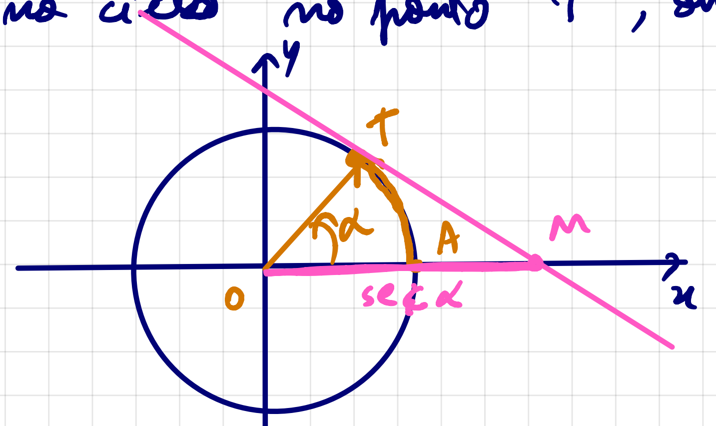
$\cos\alpha = \text{proj}_{Ox}\,\overline{OT}$

- $\tan\alpha$ é a projeção do lado terminal ou do seu prolongamento sobre a reta $x = 1$; tangente ao ciclo no ponto A.

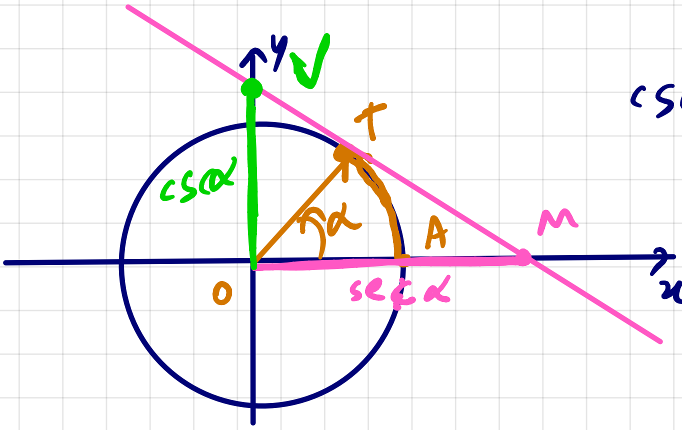


$\tan\alpha = \overline{AP}$.

- <u>SECANTE</u>. A secante de α, denotada por $\sec\alpha$ é definida como o segmento $\overline{OM}$, onde M é o intercepto do eixo horizontal com a reta tangente ao ciclo no ponto T, onde $\alpha = \widehat{AT}$.

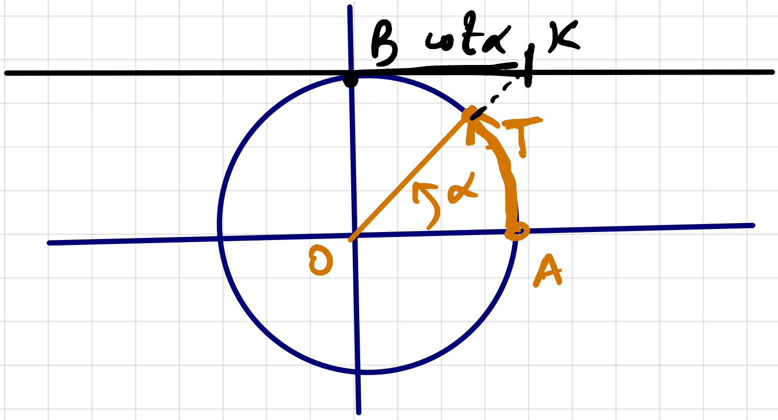


- A <u>COSSECANTE</u> de α, denotada por $\csc\alpha$, é definida como o segmento $\overline{OV}$, onde V é o intercepto do eixo vertical com a reta tangente no ciclo no ponto T, onde $\alpha = \overset{\frown}{AT}$.



$\csc\alpha = \overline{OV}$.

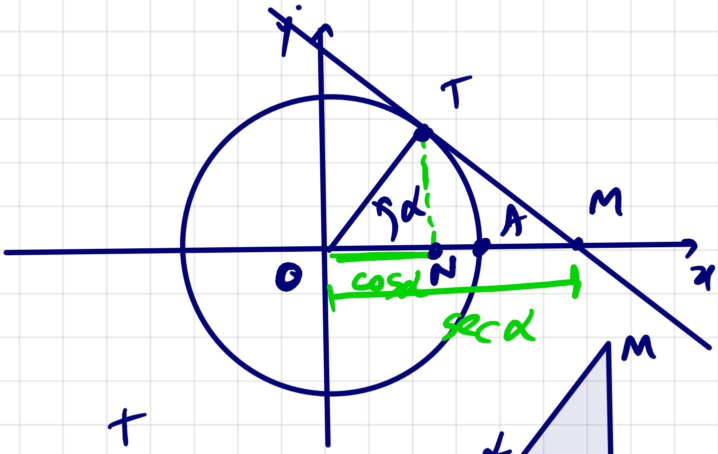
- A cotangente de α, denotada por $\cot\alpha$, é a projeção do lado terminal do arco $\overset{\frown}{AT}$ (ou de seu prolongamento) sobre a reta horizontal paralela ao eixo Ox, passando pelo ponto de coordenadas $(0,1)$.

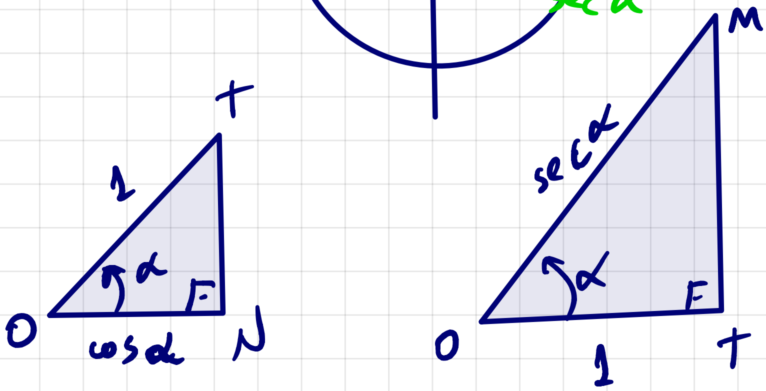


$\cot\alpha = \overline{BK}$.

Frente a esta definição temos os seguintes resultados:

01) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha}$: De fato:





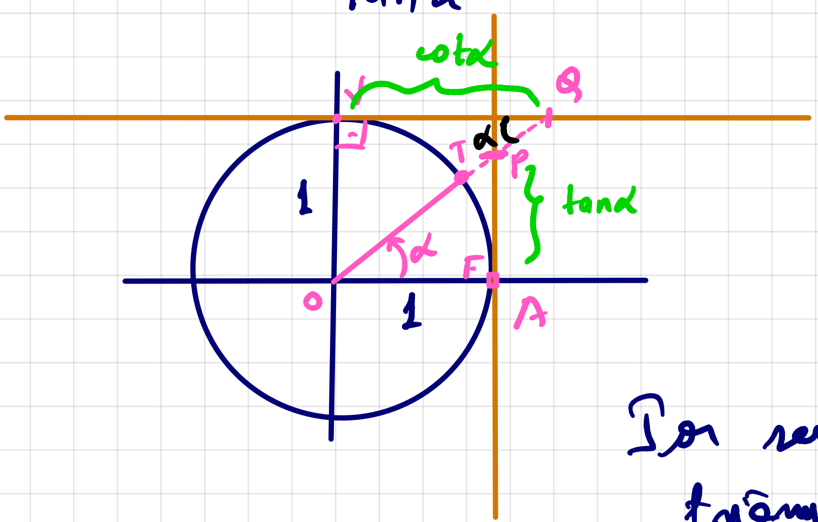
por semelhança de triângulos:

$$\frac{\cos\alpha}{1} = \frac{1}{\sec\alpha}$$

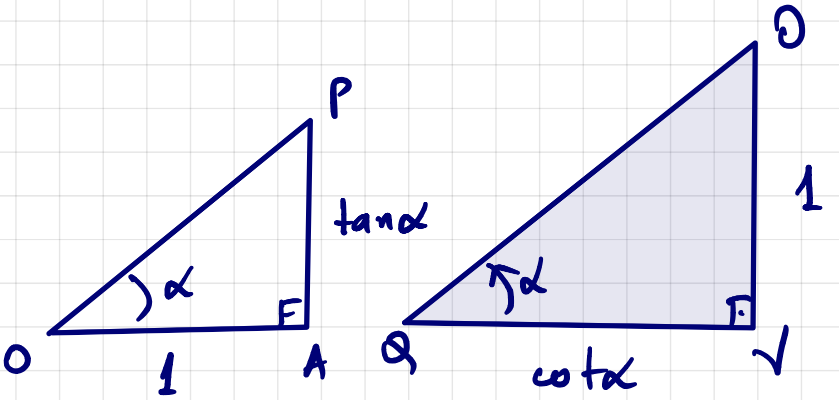
$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$$

02) $\csc\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$. De fato, observando no ciclo trigonométrico e procedendo por semelhança de triângulos, do mesmo modo que procedemos acima chegaremos à igualdade desejada. (EXERCÍCIO)

03) $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$. De fato:



Por semelhança de triângulos teremos:



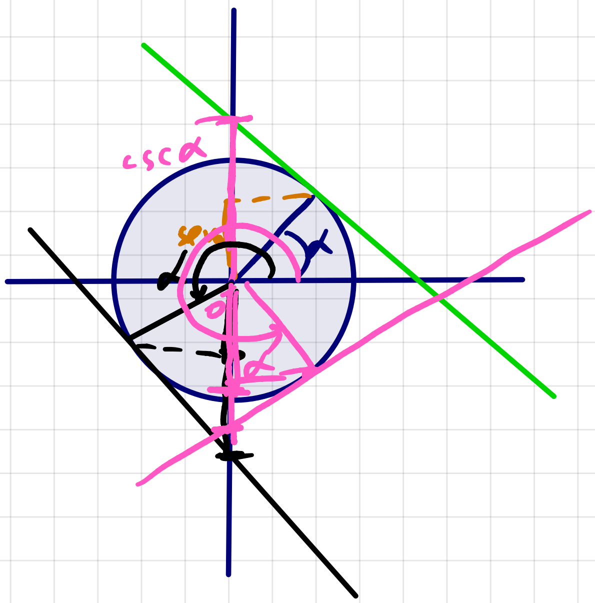
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{VD}}{\overline{QV}}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\alpha}{1} = \frac{1}{\cot\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}}$$

SINAIS NOS QUADRANTES:

SENO E COSSECANTE:

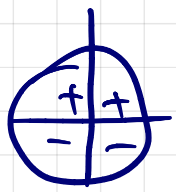


- $\alpha \in 1^{\underline{o}}q$: ; $\text{sen}\,\alpha > 0$ e $\csc\alpha > 0$
- $\alpha \in 2^{\underline{o}}q$; $\text{sen}\,\alpha > 0$ e $\csc\alpha > 0$

$\alpha \in 3^{\underline{o}}q$: ; $\text{sen}\,\alpha < 0$ e $\csc\alpha < 0$

$\alpha \in 4^{\underline{o}}q$: $\text{sen}\,\alpha < 0$ e $\csc\alpha < 0$

Resumindo: para seno e cossecante temos os sinais:



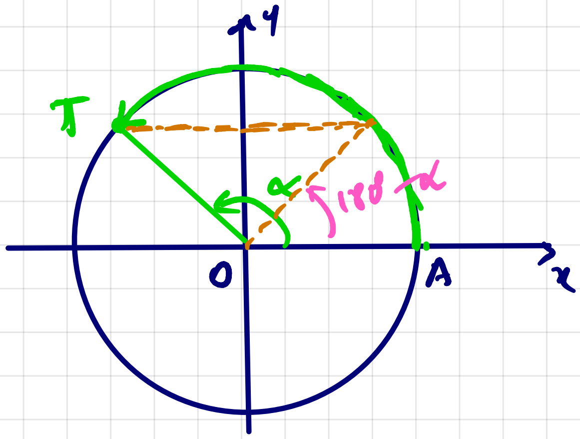
Para os pares cosseno / secante e tangente/cotangente deixamos para o leitor.

DICA DE LIVROS: para estudar/revisar conteúdos do ensino médio com profundidade: os livros da coleção "FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA ELEMENTAR"; GELSON IEZZI e outros autores (são 13 livros)

REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE: Dado um arco maior do que 90°; seus números trigonométricos podem ser expressos em termos de arcos correspondentes no 1º quadrante (que são mais úteis de se usar); observando o quadrante de origem e o sinal do número trigonométrico a ele associado. Isto faz-se com auxílio de simetrias no ciclo trigonométrico. Vejamos alguns exemplos para entender:

01) REDUÇÃO 2ºQ ⟹ 1ºQ: Dado $\alpha \in 2^\circ q$; então, por simetria; o correspondente a ele no 1ºq será $180° - \alpha$.

$\alpha = \overset{\frown}{AT}$



Assim, por exemplo: $\alpha \in 2^\circ q$:

- $\operatorname{sen}\alpha = +\operatorname{sen}(180° - \alpha)$

  ↳ POIS NO 2ºQ. O SENO É POSITIVO.

- $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$

  ↳ POIS NO 2ºQ O COSSENO É NEGATIVO.

• $\cot\alpha = -\cot(180^\circ - \alpha)$

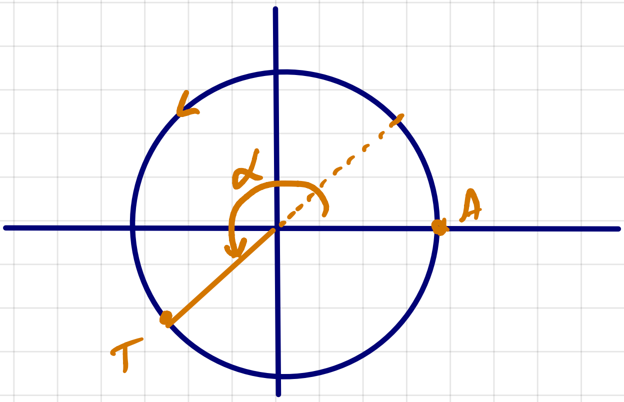
↳ POIS NO 2º q A COTANGENTE É NEGATIVA.

EX.: $\sec 150^\circ = -\sec(180^\circ - 150^\circ) = -\sec 30^\circ = -\dfrac{1}{\cos 30^\circ}$

$150^\circ \in 2^\circ q$

$= -\dfrac{2}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{3} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

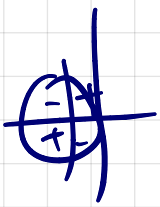
02) REDUÇÃO 3ºq → 1ºq: Dado $\alpha \in 3^\circ q$; então, por simetria, o arco correspondente a ele no 1º q será de $\alpha - 180^\circ$.



Assim, por exemplo, temos; $\alpha \in 3^\circ q$:

• $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(\alpha - 180^\circ)$

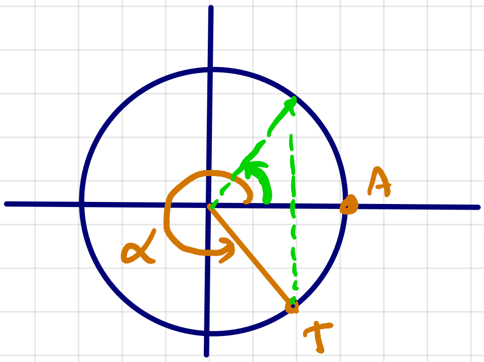
↳ POIS O SENO É NEGATIVO NO 3º q.



• $\tan\alpha = +\tan(\alpha - 180^\circ)$

↳ POIS A TANGENTE É POSITIVA NO 3º q.

3º: <u>REDUÇÃO 4ºq → 1ºq:</u> Dado $\alpha \in 4^{\underline{o}}q$; então, por simetria, o arco a ele correspondente no $1^{\underline{o}}q$ será de. $360° - \alpha$.



$\alpha \in 4^{\underline{o}}q$.

Assim, por exemplo; $\forall \alpha \in 4^{\underline{o}}q$, temos:

- $\cos\alpha = +\cos(360° - \alpha)$
  ↳ POIS NO 4ºq. O COSSENO É POSITIVO
- $\csc\alpha = -\csc(360° - \alpha)$
  ↳ POIS NO 4ºq A COSSECANTE É NEGATIVA.

EX.: $\cot 300° = -\cot(360° - 300°) = -\cot 60° =$

$300° \in 4^{\underline{o}}q$

$$= -\frac{1}{\tan 60°} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Obs.: secante e cossecante são complementares e tangente e cotangente também.

De fato:

- $\sec(90° - x) = \dfrac{1}{\cos(90° - x)} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = \csc x$.
- $\cot(90° - x) = \dfrac{1}{\tan(90° - x)} =$

$$= \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(90-x)}{\cos(90^\circ-x)}} = \frac{1}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} =$$

$$= \tan x.$$