CÁLCULO 1, T2.

L1.

25/06/24 - AULA 10

15. Um quadro de Vermeer (1632-1675) ainda contém 99,5% de seu carbono-14 (meia vida de 5730 anos). A partir dessa informação, você pode determinar se o quadro é ou não falsificado? Justifique.

Obs.: A meia-vida de um material é o tempo necessário para que metade do mesmo decaia. [por exemplo, um material radioativo, se a meia vida é, digamos, 1000 anos; então se inicialmente tem-se 10g de material radioativo, 1000 anos depois restará 5g do mesmo, etc.]

SOLUÇÃO DO PROBLEMA ACIMA:

(anos)

$t = 0 \longrightarrow m = m_0$ de carbono 14.

$t = 5730 \longrightarrow m = \frac{1}{2} m_0$

$t = 2.5730 \longrightarrow m = \frac{1}{4} m_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 m_0$

$t = 3.5730 \longrightarrow m = \left(\frac{1}{2}\right)^3 m_0.$

$\vdots$

$t = K.5730 \longrightarrow m = \left(\frac{1}{2}\right)^K m_0.$

$K = \frac{t}{5730}$

Disso, obtemos a lei de decaimento do C14:

$$\boxed{m(t) = m_0 . \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}}$$

No problema temos que: quando

$m = 99,5\% \, m_0$; quanto será t?

Ou seja, temos o problema:

$$99,5\% \, \cancel{m_0} = \cancel{m_0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\frac{995}{1000} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$a = b \;\Downarrow\; \log_c a = \log_c b$$

$$\log_2 \frac{995}{1000} = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\log_2 0,995 = \frac{t}{5730} \cdot \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\log_2 0,995 = \frac{t}{5730} \cdot \underbrace{\log_2 2^{-1}}_{=-1}$$

$$\boxed{\log_a a^x = x}$$

$$t = -5730 \cdot \log_2 0,995 \text{ anos}$$

$$t = -5730 \cdot \frac{\log 0,995}{\log 2}$$

$$\boxed{\log_b a = \frac{\log a}{\log b}}$$

mudança de base.

$$t \cong -5730 \cdot \frac{(-0,002176919)}{0,301029996}$$

$t \cong 41,437$ anos. Iniciamos verificar se o quadro é entre 1632 e 1675:

Para isto, basta efetuar:

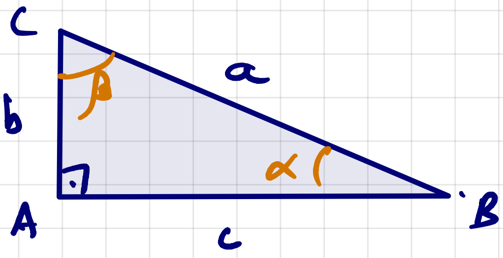
$$\begin{array}{r} 2024{,}000 \\ -\quad 41{,}437 \\ \hline 1982{,}563 \end{array}$$

Logo, este quadro foi feito por volta de 1982, o que, então, classifica-o como <u>FALSO</u>.

ELEMENTOS DA TRIGONOMETRIA:

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO:

<u>Def.</u>: Dado um triângulo retângulo ABC, reto em A, de lados a, b e c, c.f. o esquema:



$\alpha + \beta = 90°$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}.$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{b}{c}.$$

Do mesmo modo, tem-se:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{c}{a} \qquad \cos\beta = \frac{b}{a} \qquad \tan\beta = \frac{c}{b}.$$

Note que $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \beta = 90° - \alpha$.

Então: $$\underline{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{a} = \cos\beta = \underline{\cos(90° - \alpha)}$$

$$\underline{\cos\alpha} = \frac{c}{a} = \operatorname{sen}\beta = \underline{\operatorname{sen}(90° - \alpha)}$$

Ou seja, temos que o seno e o cosseno são <u>complementares</u>.

<u>Ex.:</u> $\operatorname{sen} 57° = \cos(90° - 57°) = \cos 33°$

Além disso, c.f. o T. de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad \div (a^2 \neq 0)$$

$$1 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

$$1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$1 = (\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2$$

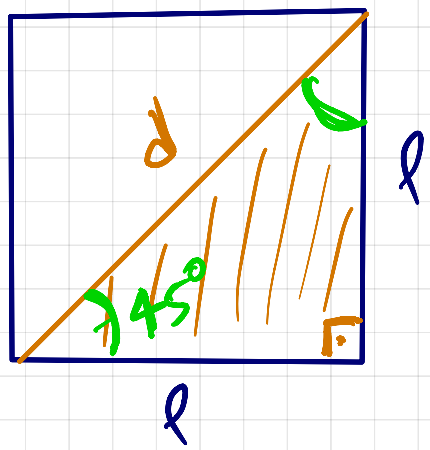
NOTAÇÃO: $(\operatorname{sen}\alpha)^m = \operatorname{sen}^m\alpha$; etc.

Ou seja, obtemos a relação trigonométrica fundamental:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}\ , \quad 0 \leq \alpha \leq 90^\circ \quad (*)$$

Valores notáveis: 30° ; 45° e 60°.

• 45°: considere um quadrado de lado ℓ.



Pelo T. de Pitágoras:

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$

$$d^2 = 2\ell^2$$

$$d = \ell\sqrt{2}$$

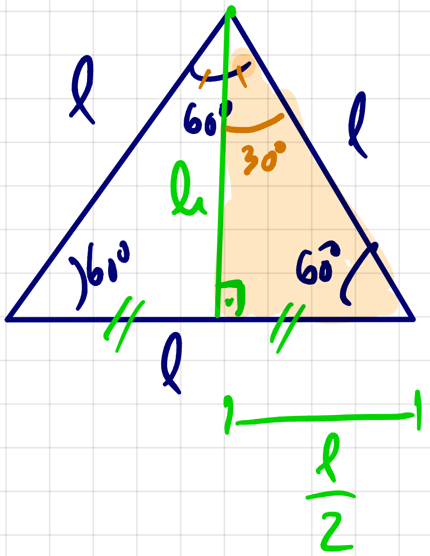
$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\ell}{d} = \frac{\cancel{\ell}}{\cancel{\ell}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \operatorname{sen}(90^\circ - 45^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{\ell}{\ell} = 1.$$

(*) De fato a relação $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ vale $\forall \alpha$. Isto pode ser mostrado a posteriori.

• $30°$ e $60°$: usamos um triângulo equilátero de lado ℓ.



Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\ell^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + h^2$$

$$\ell^2 = \frac{\ell^2}{4} + h^2$$

$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4}$$

$$h^2 = 3\frac{\ell^2}{4} \Rightarrow \boxed{h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

Assim, obtemos:

$$\text{sen}\,30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\cancel{\ell}}{2} \times \frac{1}{\cancel{\ell}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{h}{\ell} = \frac{\frac{\cancel{\ell}\sqrt{3}}{2}}{\cancel{\ell}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

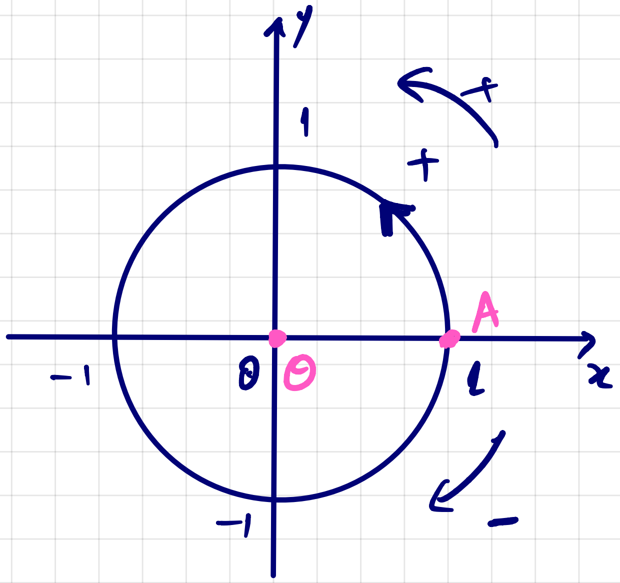
$$\tan 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{h} = \frac{\frac{\cancel{\ell}}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{\ell}\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen}\,60° = \cos(90° - 60°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \text{sen}\,(90° - 60°) = \text{sen}\,30° = \frac{1}{2}$$

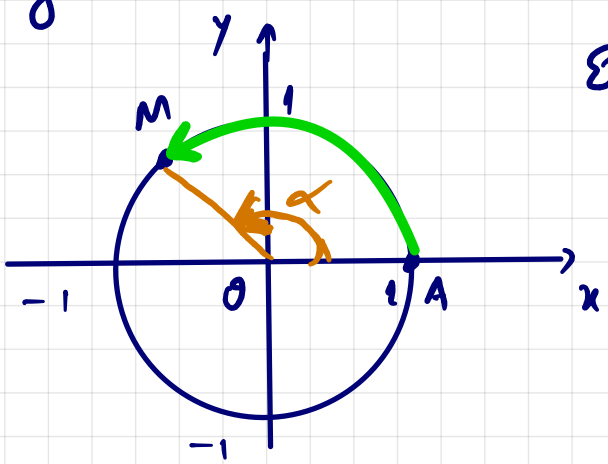
$$\tan 60° = \frac{h}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\frac{\cancel{\ell}\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{\ell}}{\cancel{2}}} = \sqrt{3}$$

CICLO TRIGONOMÉTRICO: é uma circunferência de raio unitário, centrada na origem do sistema cartesiano, orientado, sendo o sentido positivo o anti-horário.



Na ilustração ao lado, o ponto O é chamado de ORIGEM DOS EIXOS, e o ponto A é chamado de ORIGEM DOS ARCOS.

Um arco $\overset{\frown}{AM}$ é um arco com origem em A e extremidade em M, determinando um ângulo α no ciclo trigonométrico.



Escreveremos

$$\alpha = \overset{\frown}{AM}$$

Dessa forma, no ciclo trigonométrico tem sentido estudar arcos de mais do que 360°, ou até mesmo negativos.

Ex.: Considere o arco $\overset{\frown}{AP} = 1000°$. Então,

$$1000° = 360° + 360° + 280° \quad ; \quad \text{ou ainda:}$$

$$\begin{array}{r|l} 1000° & 360 \\ \hline -720° & 2 \\ \hline 280° & \end{array}$$

VOLTAS NO CICLO.

ONDE "PARA".

Ou seja, escrevemos:

$$1000° = 2 \times 360° + 280°$$

De maneira geral, escrevemos:

Def.: A expressão geral de um arco $\overset{\frown}{AT}$ é dada por

$$\overset{\frown}{AT} = K.360° + \alpha \quad ; \quad 0 \leq \alpha < 360°,$$

onde α chama-se MENOR DETERMINAÇÃO do arco $\overset{\frown}{AT}$.

Def.: Dizemos que dois arcos são CÔNGRUOS quando possuírem mesmos origem e extremidade, diferindo no número de voltas, apenas.

Dessa forma, temos que

$$\overset{\frown}{AT} = K.360° + \alpha \quad ; \quad 0° \leq \alpha < 360°$$

chama-se EXPRESSÃO GERAL DOS ARCOS CÔNGRUOS.

Ex.: $\overset{\frown}{AL} = K360° + 100°$.

Então:

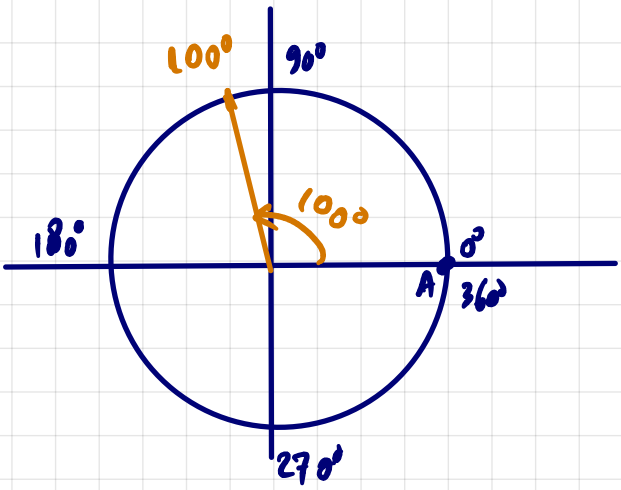
$k = 0 : \quad \overset{\frown}{AL}_0 = 0 \cdot 360° + 100° = 100°$

$k = 1 : \quad \overset{\frown}{AL}_1 = 1 \cdot 360° + 100° = 460°$

$k = 2 : \quad \overset{\frown}{AL}_2 = 2 \cdot 360° + 100° = 820°$

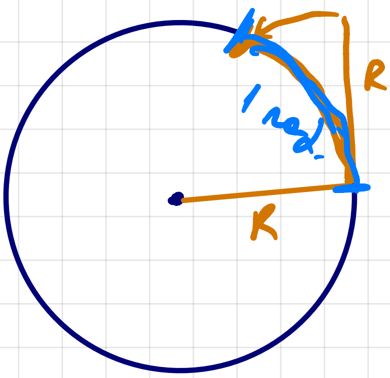
$k = -1 : \quad \overset{\frown}{AL}_{-1} = -1 \cdot 360° + 100° = -260°$

$\vdots$



A saber grau é a fração $\frac{1}{360}$ da circunferência.

O radiano é outra medida angular, e corresponde à medida do comprimento de um arco de circunferência igual à medida do seu raio.



1 radiano = 1 rad.

Note que, por regra de três, segue que, no ciclo trigonométrico tem-se 2π radianos:

$$\begin{array}{ccc} 1 \text{ rad} & \text{———} & R \\ x & \text{———} & C = 2\pi R \end{array}$$

$$x \cdot \cancel{R} = 1 \text{ rad} \cdot 2\pi \cancel{R}$$

$$\boxed{x = 2\pi \text{ rad.}}$$

Relação de conversão entre grau e radiano:

$$360° \text{ ——— } 2\pi \text{ rad.} \qquad \div 2$$

$$\boxed{180° \text{ ——— } \pi \text{ rad.}}$$