CÁLCULO 1, T1.

20/06/24 — AULA 09

LOGARITMOS E FUNÇÃO LOGARÍTMICA:

Def.: Dados $a>0$ e $b>0$, $b\neq 1$, chama-se LOGARITMO de a NA BASE b, ao expoente $c \in \mathbb{R}$ no qual devemos elevar a base b, de modo a obter o número a.

Simbolicamente, escrevemos:

$$\log_b a = c \overset{\text{def.}}{\iff} \underbrace{b^c = a}_{}.$$

NOTAÇÃO EXPONENCIAL PARA A DEF. DE LOGARITMO

Da notação exponencial justifica-se o fato de se exigir que $a>0$ e $b>0$, $b\neq 1$.

Ex.: (a) 3 é o logaritmo de 8 na base 2, pois $2^3=8$:

$$3 = \log_2 8 \underset{\text{def.}}{\iff} 2^3 = 8$$

(b) -1 é o logaritmo 4 na base $\frac{1}{4}$, pois $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=4$:

$$-1 = \log_{\frac{1}{4}} 4 \overset{\text{def.}}{\iff} \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4$$

(c) -2 é o logaritmo de 16 na base $\frac{1}{4}$ pois:

$$-2 = \log_{\frac{1}{4}} 16 \overset{\text{def}}{\iff} \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$$

BASES USUAIS: Uma base importante é a base 10, (logaritmos decimais). Neste caso, escrevemos:

$$\log_{10} x = \log x .$$

Outra base muito usada, pois decorre de problemas da natureza, é o logaritmo na base e, onde e é o número de Euler:

$$e \approx 2{,}71828182845 90 \ldots \quad \text{irracional}.$$

Neste caso, escrevemos:

$$\log_e x = \ln x ,$$

chamado de LOGARITMO NATURAL.

PROPOSIÇÃO: Valem as seguintes propriedades para o logaritmo, sendo $b > 0$, $b \neq 1$; $\alpha, \beta > 0$:

01) $\log_b b = 1$

02) $\log_b 1 = 0$

03) $\log_b b^m = m$, $\forall m \in \mathbb{R}$:

04) $\log_b \alpha^m = m . \log_b \alpha$

05) $\log_b \alpha . \beta = \log_b \alpha + \log_b \beta$

06) $\log_b \frac{\alpha}{\beta} = \log_b \alpha - \log_b \beta$.

07) $\log_b \alpha = \log_b \beta \iff \alpha = \beta$

Obs.: As propriedades 04, 05 e 06 são chamadas de PROPRIEDADES OPERATÓRIAS dos logaritmos.

DEMONSTRAÇÃO:

01) $\log_b b = 1$: De fato, se

$$\log_b b = x \overset{def.}{\iff} b^x = b^1 \iff x = 1.$$

Portanto, $\log_b b = 1$

02) $\log_b 1 = 0$:

De fato, se $\log_b 1 = x \overset{def.}{\iff} b^x = 1 = b^0$

$\iff x = 0$

Portanto, $\log_b 1 = 0$.

03) $\log_b b^m = m$, $\forall m \in \mathbb{R}$:

De fato, escreva $\log_b b^m = x$. Então:

$$\log_b b^m = x \underset{def.}{\iff} b^x = b^m \iff \boxed{x = m}$$

04) $\log_b \alpha^m = m \cdot \log_b \alpha$

Sejam $\log_b \alpha^m = x$ e $m \cdot \log_b \alpha = y$

Então:

$\log_b \alpha^m = x \overset{\text{def.}}{\iff} \boxed{b^x = \alpha^m}$ (I) ; e

$m \cdot \log_b \alpha = y \iff \log_b \alpha = \dfrac{y}{m}$; $m \neq 0$.

O caso $m = 0$ é trivial.

$\Updownarrow$ def.

$\boxed{b^{\frac{y}{m}} = \alpha}$ (II)

De (I) e (II), vem:

$\underset{(I)}{b^x =} \alpha^m = \underset{(II)}{\left(b^{\frac{y}{\cancel{m}}}\right)^{\cancel{m}}} \iff b^x = b^y \iff x = y$

Ou seja, mostramos que

$\log_b \alpha^m = x = y = m \cdot \log_b \alpha$

05) $\log_b \alpha.\beta = \log_b \alpha + \log_b \beta$:

Suponha $\log_b \alpha.\beta = x$; $\log_b \alpha = y$ e $\log_b \beta = z$. Vamos mostrar: $x = y+z$

De fato:

- $\log_b \alpha.\beta = x \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \boxed{b^x = \alpha.\beta}$ $(*)$
- $\log_b \alpha = y \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \boxed{b^y = \alpha}$ $(**)$
- $\log_b \beta = z \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \boxed{b^z = \beta}$ $(***)$

Combinando $(*)$, $(**)$ e $(***)$, vem:

$$b^x = \alpha.\beta = b^y.b^z = b^{y+z}$$

$$\Rightarrow b^x = b^{y+z} \Rightarrow x = y+z$$

$$\Rightarrow \log_b \alpha.\beta = \log_b \alpha + \log_b \beta.$$

a:6) $\log_b \frac{\alpha}{\beta} = \log_b \alpha - \log_b \beta$:

Escreva $\log_b \frac{\alpha}{\beta} = x$; $\log_b \alpha = y$ e $\log_b \beta = z$.

Vamos mostrar que $x = y - z$.

De fato, note que:

- $\log_b \frac{\alpha}{\beta} = x \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \boxed{b^x = \frac{\alpha}{\beta}}$ (i)

- $\log_b \alpha = y \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \boxed{b^y = \alpha}$ (ii)

- $\log_b \beta = z \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \boxed{b^z = \beta}$ (iii)

Combinando (i), (ii) e (iii), obtemos:

$$b^x = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{b^y}{b^z} = b^{y-z} \Rightarrow b^x = b^{y-z}$$

$$\Rightarrow x = y - z \text{ ; ou seja;}$$

$$\log_b \frac{\alpha}{\beta} = \log_b \alpha - \log_b \beta .$$

07) $\log_b \alpha = \log_b \beta \iff \alpha = \beta$:

Se $\alpha = \beta$, então $\log_b \alpha = \log_b \beta$. Isto mostra a suficiência.

Mostremos a necessidade:

Suponha que $\log_b \alpha = \log_b \beta$.

Então, $\log_b \alpha - \log_b \beta = 0$, ou seja;

$$\log_b \frac{\alpha}{\beta} = 0 \overset{\text{def.}}{\iff} \underset{1}{b^0} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\iff \frac{\alpha}{\beta} = 1 \iff \alpha = \beta.$$

$\square$

PROPOSIÇÃO: (MUDANÇA DE BASE). Sejam $a > 0$ e $b, c > 0$; $b, c \neq 1$. Então:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$$

DEMONSTR.: Escreva $\log_b a = x$;

$\log_c a = y$ e $\log_c b = z$. Precisamos mostrar que $x = \frac{y}{z}$.

De fato:

- $\log_c a = y \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} c^y = a$ (I)
- $\log_c b = z \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} c^z = b.$ (II)
- $\log_b a = x \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} b^x = a.$ (III)

Juntando (I), (II) e (III), vem:

$$(c^z)^x = b^x = a = c^y$$

$$\Rightarrow c^{z \cdot x} = c^y \Rightarrow z \cdot x = y \Rightarrow x = \frac{y}{z}$$

$\square$

FUNÇÃO LOGARÍTMICA:

Def.: Chama-se FUNÇÃO LOGARÍTMICA a função $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \log_b x \quad , \quad \text{com } b > 0,\ b \neq 1.$$

Transformando para a notação exponencial, vamos obter:

$$f(x) = y = \log_a x \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} x = a^y > 0$$

$D(f) = (0, +\infty)$

Observando a notação exponencial;

$$x = a^y,$$

segue que a função logarítmica será crescente se $a > 1$ e será decrescente se $0 < a < 1$.

A ideia para esboço gráfico da função logarítmica será igual à da função exponencial.

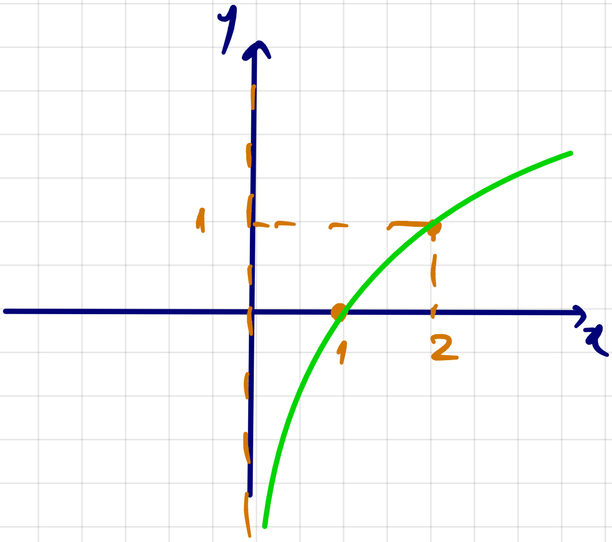
Ex.: 01) $f(x) = \log_2 x$. gráfico?

Solução: $y = \log_2 x \overset{def}{\Longleftrightarrow} 2^y = x > 0$

$D(f) = (0, +\infty)$

$x = 2^y$	y
$1 = 2^0$	0
$2 = 2^1$	1

o eixo vertical $x = 0$ será a ASSÍNTOTA VERTICAL.



02) $f(x) = 1 - 2\log_2(x+1)$. gráfico?

$D(f) = ?$ $Im(f) = ?$

Solução:

$$y = 1 - 2.\log_2(x+1)$$

$$\Rightarrow y - 1 = -2\log_2(x+1)$$

$$\Rightarrow \frac{1-y}{2} = \log_2(x+1) \overset{def.}{\Longleftrightarrow} 2^{\frac{1-y}{2}} = x+1$$

$$\Leftrightarrow x = 2^{\frac{1-y}{2}} - 1$$

$x+1 > 0$

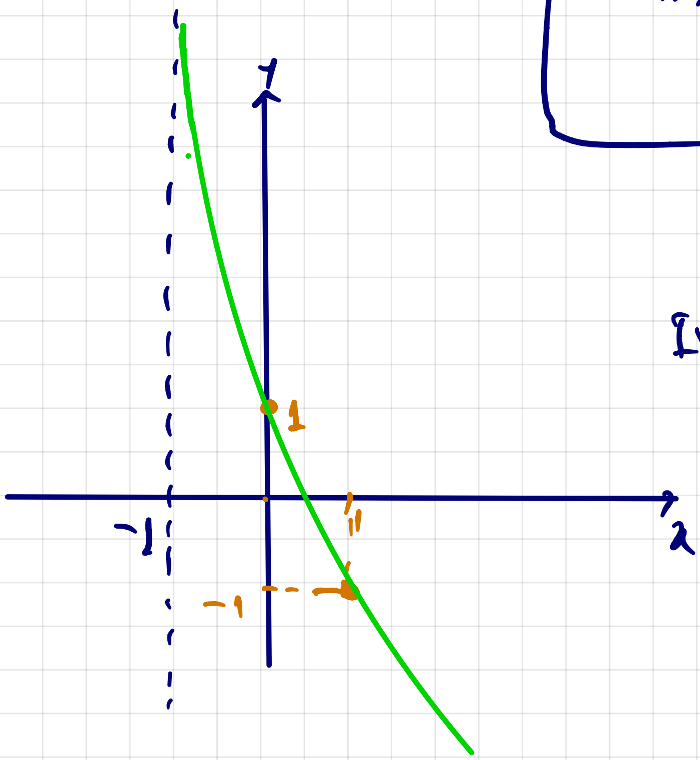
$\Rightarrow x > -1$

$D(f) = (-1, +\infty)$

Assíntota vertical:

$x = -1$.

$x = 2^{\frac{1-y}{2}} - 1$	y
$2^0 - 1 = 0$	1
$2^1 - 1 = 1$	-1



$Im(f) = \mathbb{R}$