CÁLCULO 3

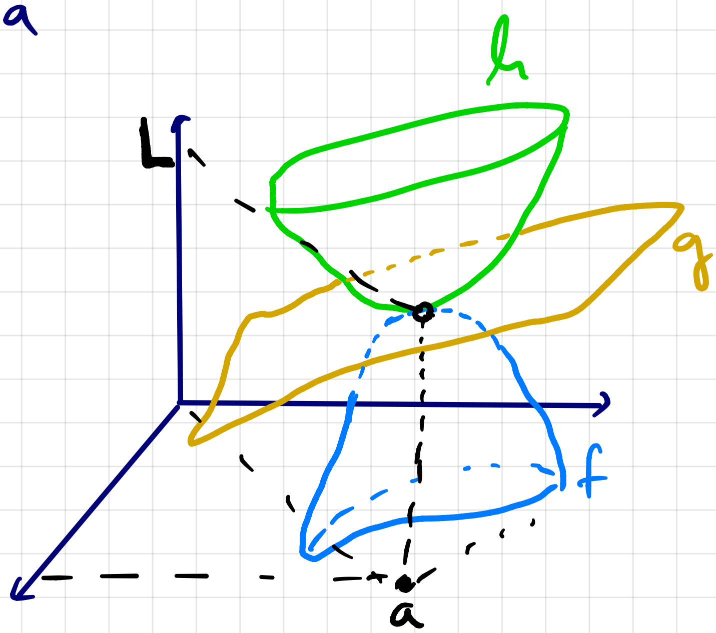
03/05/24 - AULA 08

No final da aula passada enunciamos o seguinte resultado:

TEOREMA (TEOREMA DO SANDUÍCHE) Sejam $f, g, h : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções, com $a \in \mathbb{R}^m$ ponto de acumulação de Ω, tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in \Omega$.

Se $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, então

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$



DEMONSTR.: Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, segue que $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que:

$$\forall x \in \Omega : 0 < d(x, a) < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad (*)$$

Do mesmo modo, como $\lim_{x \to a} h(x) = L$, segue que

$\exists\, \delta_2 > 0$ tal que,

$\forall x \in \Omega : 0 < d(x,a) < \delta_2 \implies |h(x) - L| < \varepsilon. \quad (**)$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Assim,

$\forall x \in \Omega : 0 < d(x,a) < \delta$, valem $(*)$ e $(**)$,

ou seja, $|f(x) - L| < \varepsilon$ e $|h(x) - L| < \varepsilon$.

Como por hipótese, $\forall x \in \Omega$,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad -L:$$

$$f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L$$

Note que

obs.:

$|r| \leq a$

$\Updownarrow$

$-a \leq r \leq a$

$-a \qquad a$

$$\begin{cases} |f(x) - L| < \varepsilon \iff -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \\ |h(x) - L| < \varepsilon \iff -\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon \end{cases}$$

Disso, segue que

$$-\varepsilon < f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L < \varepsilon$$

$\implies$

$$-\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon, \quad \text{ou seja,}$$

$|g(x) - L| < \varepsilon$, sempre que $0 < d(x,a) < \delta$.

Ou seja, mostramos que $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

$\square$

EXEMPLO:

LISTA 03 - 07:

7. Sabendo que

$$1 - \frac{x^2y^2}{3} < \frac{\arctan xy}{xy} < 1,$$

o que pode-se dizer sobre

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan xy}{xy}? \text{ Justifique.}$$

SOLUÇÃO: Note que:

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 = 1$

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 - \frac{x^2y^2}{3} = 1 - \frac{0}{3} = 1$

Portanto, pelo T. do Sanduíche, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan xy}{xy} = 1.$$

02) LISTA 03 - 09.

9. Calcule, se existir, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cos\frac{1}{y}$, lembrando que $|\cos\alpha| \leq 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

SOLUÇÃO:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \cos\frac{1}{y} = 0 \; ?$$

FUNÇÃO LIMITADA.

Escreva: $\left|\cos\frac{1}{y}\right| \leq 1$. Ou seja,

$$-1 \leq \cos\frac{1}{y} \leq 1.$$

multiplicando por $x>0$, vem:

$$-x \leq x.\cos\frac{1}{y} \leq x \qquad (*)$$

multiplicando por $x<0$, vem:

$$-x \geq x.\cos\frac{1}{y} \geq x \qquad (**)$$

Tanto em $(*)$ quanto $(**)$ temos que

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} -x = 0$

Então, pelo T. do Sanduíche segue que

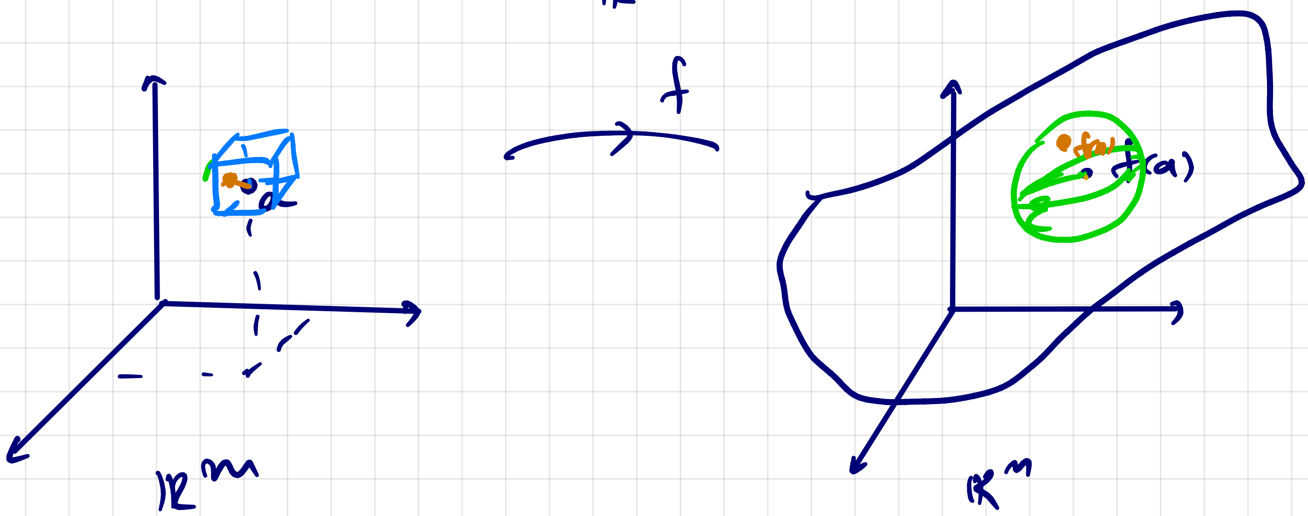
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x.\cos\frac{1}{y} = 0.$$

CONTINUIDADE:

Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função e $a \in \Omega$.

Dizemos que f é contínua no ponto a se, e somente se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x \in \Omega$:

$$\underset{\mathbb{R}^m}{d}(x, a) < \delta \implies \underset{\mathbb{R}^n}{d}(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$



Quando $a \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ também for um ponto de acumulação do conj. Ω, i.e., quando $a \in \Omega \cap \Omega'$, então, f é contínua em a se, e só se:

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

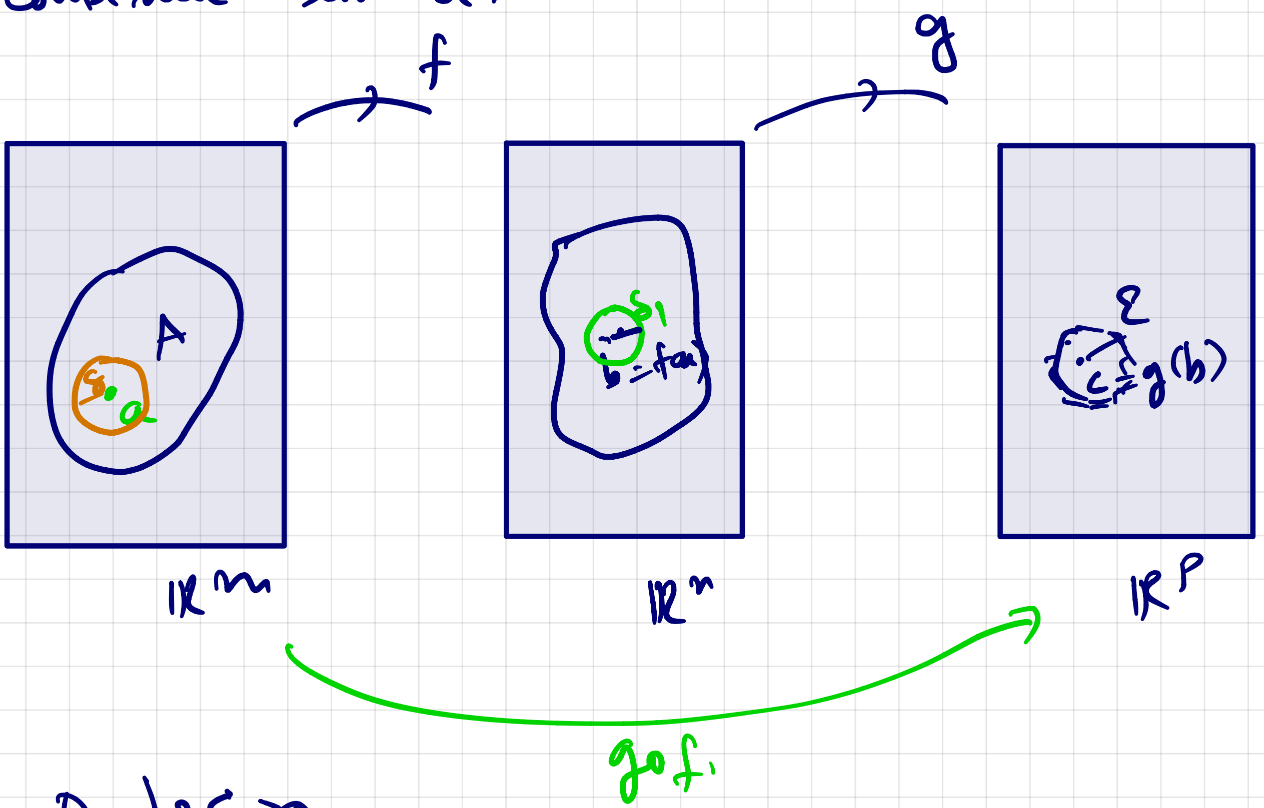
Def.: Dizemos que $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua quando ela for contínua em todos os pontos do seu domínio.

PROPOSIÇÃO: Se $f, g: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ forem funções contínuas, então $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, f/g, $g \neq 0$ também contínuas.

PROPOSIÇÃO: A composição de funções contínuas resulta em uma função contínua.

DEMONSTR.: Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g: B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f(A) \subset B$, funções contínuas em um ponto $a \in A$.

Vamos mostrar que $g \circ f: A \to \mathbb{R}^p$ é contínua em a.



Dado $\varepsilon > 0$

Seja $b = f(a) \in B \subset \mathbb{R}^n$. Como g é contínua, em particular, é contínua em b. Então, $\exists \delta_1 > 0$ tal que, $\forall y \in B$: $d(y, b) < \delta_1 \Rightarrow d(g(y), g(b)) < \varepsilon$.

Como f também é contínua, em particular é contínua em $a \in A \subset \mathbb{R}^m$. Então, $\exists\, \delta > 0$ tal que, $\forall x \in A$: $d(x,a) < \delta \Rightarrow d(\underbrace{f(x)}_{y}, \underbrace{f(a)}_{b}) < \delta_1$

$$\Downarrow$$

$$d(g(y), g(b)) < \varepsilon$$

Ou seja, por transitividade segue que

$d(g(y), g(b)) < \varepsilon$, sempre que $d(x,a) < \delta$.

Isto é, dado $\varepsilon > 0$ achamos $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in A$: $d(x,a) < \delta \Rightarrow d(\underbrace{g(y)}_{g(f(x))}, \underbrace{g(b)}_{g(f(a))}) < \varepsilon$

$$\Rightarrow d((g \circ f)(x), (g \circ f)(a)) < \varepsilon,$$

i.e., $g \circ f$ é contínua ~~em~~ no ponto a.

Como $a \in A$ é arbitrário, segue que $g \circ f$ é contínua. $\square$

Obs: c.f. perguntado na aula; um exemplo de composição a várias variáveis:

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y,z) = (\operatorname{sen} xy, x-3z)$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \quad g(x,y) = (x+y, 1, x^2, \cos y)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^4 \end{tikzcd}$$

$\exists\, g\circ f$

$\exists\, g\circ f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(g\circ f)(x,y,z) = g(f(x,y,z)) =$

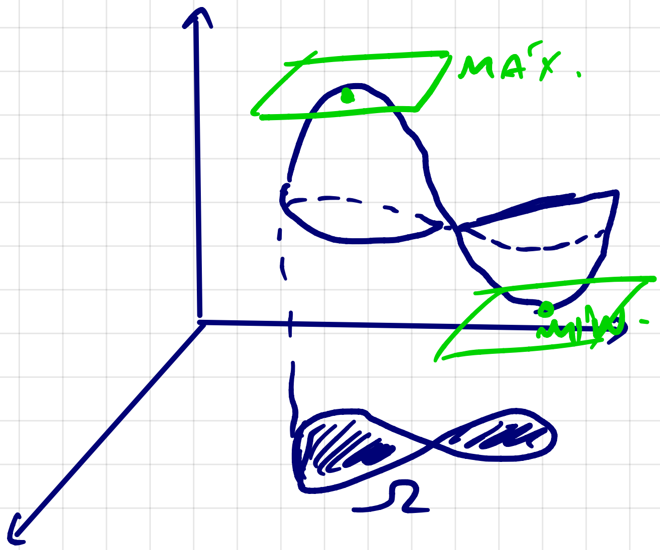
$= g(\operatorname{sen} xy, x-3z) = (\operatorname{sen} xy + x - 3z, 1, (\operatorname{sen} xy)^2, \cos(x-3z))$

$\Rightarrow (g\circ f)(x,y,z) = (\operatorname{sen} xy + x - 3z, 1, \operatorname{sen}^2 xy, \cos(x-3z))$

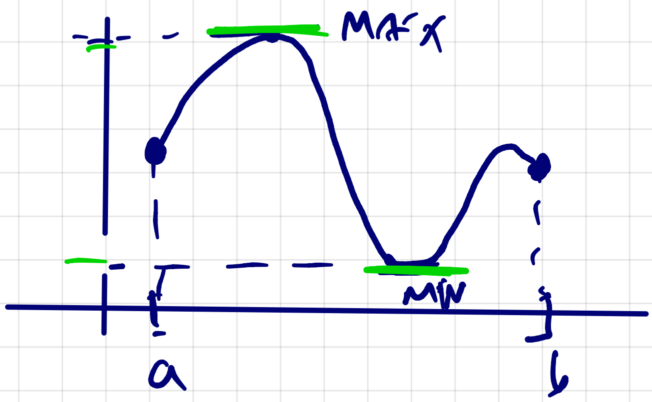
TEOREMA DE WEIERSTRASS. Uma função $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ contínua no compacto Ω assume valores máximo e mínimo em Ω.

(lembrar-nos: COMPACTO É LIMITADO E FECHADO)

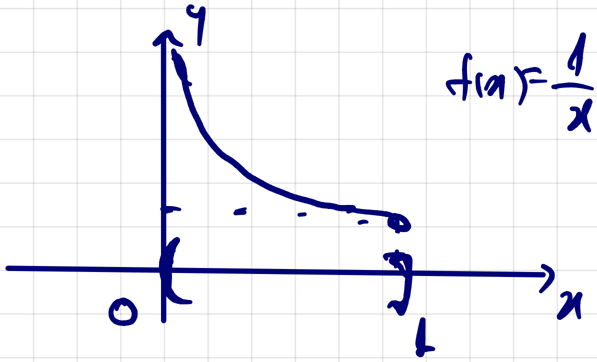
A demonstração desse resultado não é dada em cursos de cálculo.



obs.: No caso em $\mathbb{R}$; compacto seria um intervalo fechado, e então, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua assume valores máx. e mínimo.



Se o intervalo não for fechado (i.e, não é compacto), o resultado pode ser falso. Ex.:



$f(x) = \frac{1}{x}$; $f : (0, +1] \to \mathbb{R}$

$\exists$ min f, mas $\nexists$ máx. f.

Def: Dizemos que $\vec{f} : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ é contínua em $a \in \Omega$ se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que:

$\forall t \in \Omega$: $0 < |t - a| < \delta \implies d(\vec{f}(t), \vec{f}(a)) < \varepsilon$.

Ex.: L3 – 12:

12. Calcular o limite e analisar a continuidade da função vetorial $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\vec{f}(t) = \begin{cases} \frac{|t-3|}{t-3}\vec{i} + t^2\vec{j}, & \text{se} \quad t \neq 3 \\ \vec{0}, & \text{se} \ t = 3 \end{cases}$$

Solução: Precisamos verificar se $\exists \lim_{t \to 3} \vec{f}(t)$.

$$|t-3| = \begin{cases} t-3, & \text{se } t-3 \geq 0 \\ -(t-3), & \text{se } t-3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} t-3, & \text{se } t \geq 3 \\ -(t-3), & \text{se } t < 3 \end{cases}$$

Assim:

- $\lim_{t \to 3^+} \vec{f}(t) = \lim_{t \to 3^+} \left(\frac{|t-3|}{t-3}, t^2 \right) =$

$$= \left(\lim_{t \to 3^+} \frac{\cancel{t-3}}{\cancel{t-3}} , \lim_{t \to 3^+} t^2 \right) = \underline{\underline{(1, 9)}} .$$

$$\bullet \lim_{t \to 3^-} \vec{f}(t) = \left(\lim_{t \to 3^-} \frac{|t-3|}{t-3} , \lim_{t \to 3^-} t^2 \right)$$

$$= \left(\lim_{t \to 3^-} \frac{-(\cancel{t-3})}{\cancel{t-3}} , \lim_{t \to 3^-} t^2 \right) = \underline{\underline{(-1, 9)}}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 3^-} \vec{f}(t) \neq \lim_{t \to 3^+} \vec{f}(t) \; ; \text{ logo, } \nexists \lim_{t \to 3} \vec{f}(t)$$

Então $\vec{f}$ não é cont. em $t = 3$.