CÁLCULO 1.

02/05/24 — AULA 05

Def.: Dizemos que uma função $f: A \to B$ é crescente se $\forall x, y \in A: \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$

Quando a desigualdade for apenas $<$ (ou seja, desigualdade estrita), dizemos que f é estritamente crescente.

Ex.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = 2^x$.

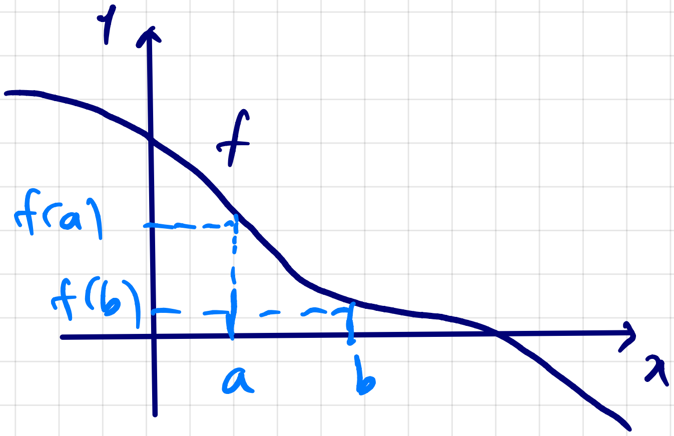
Note que,

$$a \leq b \Rightarrow \underbrace{2^a}_{= f(a)} \leq \underbrace{2^b}_{= f(b)} \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

Logo, $f(x) = 2^x$ é uma função crescente.

Def.: Dizemos que $f: A \to B$ é decrescente se $\forall x, y \in A: \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

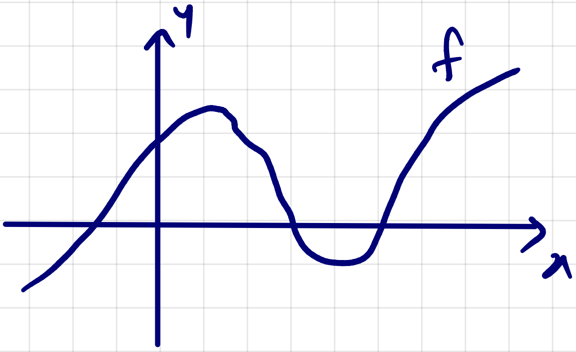
(será estritamente decrescente quando a desigualdade for estrita)



$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

[f é decrescente (estritam.)]

Obs: Existem funções que não são crescentes e nem decrescentes. O gráfico abaixo é um exemplo disso:



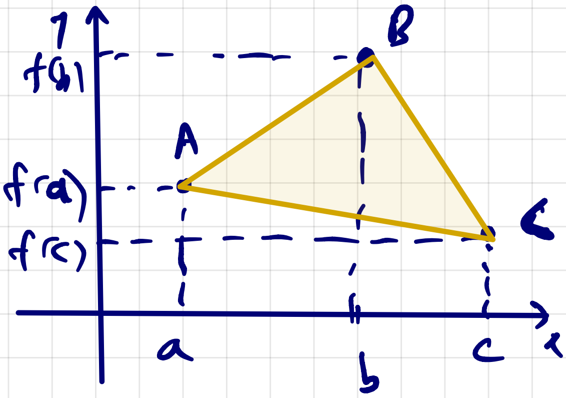
A função de DIRICHLET vista na aula passada é outro exemplo de função que não é nem crescente e nem decrescente.

FUNÇÃO AFIM: É a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

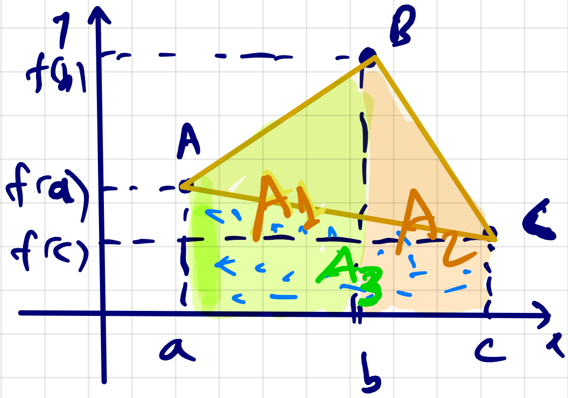
$$f(x) = mx + n \quad , \quad m, n \in \mathbb{R}$$

Quando $m = 0$ temos $f(x) = n$, uma função constante.

O gráfico de uma função afim é uma linha reta. De fato, sejam $A(a, f(a))$; $B(b, f(b))$; $C(c, f(c))$ três pontos sobre o gráfico de f. Vamos calcular a área do triângulo com vértices nestes pontos.

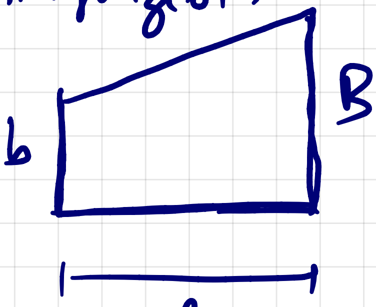


Seja S a área do triângulo ABC



$$S = A_1 + A_2 - A_3$$

A_1, A_2 e A_3 são áreas de trapézios.



$$A = \frac{(b+B).h}{2}$$

Assim:

(lembre que $f(x) = mx + n$)

$$S = A_1 + A_2 - A_3 =$$

$$= \frac{(f(b)+f(a)).(b-a)}{2} + \frac{(f(b)+f(c)).(c-b)}{2} - \frac{(f(a)+f(c)).(c-a)}{2}$$

$$= \frac{(mb+n+ma+n)(b-a)}{2} + \frac{(mb+n+mc+n).(c-b)}{2}$$

$$- \frac{(ma+n+mc+n)(c-a)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \Big[(mb + ma + 2n)(b-a) + (mb + mc + 2n)(c-b) - (ma + mc + 2n)(c-a) \Big]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \Big[\cancel{mb^2} + \cancel{mab} + \cancel{2bn} - \cancel{mab} - \cancel{ma^2} - \cancel{2an} + \cancel{mbc} + \cancel{mc^2} + \cancel{2cn} - \cancel{mb^2} - \cancel{mbc} - \cancel{2bn} - \cancel{mac} - \cancel{mc^2} - \cancel{2nc} + \cancel{ma^2} + \cancel{mac} + \cancel{2an} \Big]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

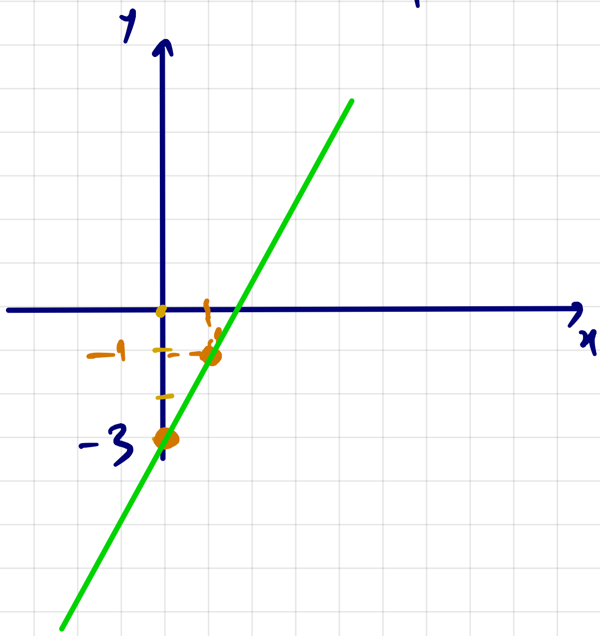
Ou seja a área do triângulo com vértices em três pontos A, B e C sobre a função afim $f(x) = mx + n$ é zero, o que diz que estes 3 pontos estão alinhados. Pela arbitrariedade da escolha destes três pontos, segue que o gráfico da função afim é uma linha reta.

Como dois pontos no plano definem uma reta, para esboçar o gráfico de uma função afim, basta traçar uma reta ligando dois pontos quaisquer sobre a mesma.

Ex: Esboce o gráfico de $f(x) = 2x - 3$.

SOLUÇÃO:

x	$y = f(x) = 2x - 3$
0	$2.0 - 3 = -3$
1	$2.1 - 3 = -1$



$D(f) = \mathbb{R}$.

$Im(f) = \mathbb{R}$.

PROP.: A função afim $f(x) = ax + b$ é crescente se $a > 0$ e decrescente se $a < 0$.

DEMONSTR.: Suponha f crescente. Então, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\alpha \le \beta \Rightarrow f(\alpha) \le f(\beta) \Rightarrow$

$$\Rightarrow a.\alpha + \cancel{b} \le a.\beta + \cancel{b}$$

$$\Rightarrow a.\alpha \le a.\beta$$

$$\Rightarrow a.\beta - a.\alpha \ge 0$$

$$a\underbrace{(\beta - \alpha)}_{\ge 0,\ \text{pois } \beta \ge \alpha} \ge 0 \Rightarrow a > 0. \text{ ou } a = 0$$

mas $a = 0$ é a função constante.

Logo, $a > 0$.

Suponha agora que f seja decrescente, ou seja, que $\underline{\alpha \leq \beta} \Rightarrow f(\alpha) \geq f(\beta)$

Ou seja, tem-se

$$a.\alpha + \cancel{b} \geq a.\beta + \cancel{b}$$

$$a\alpha - a.\beta \geq 0$$

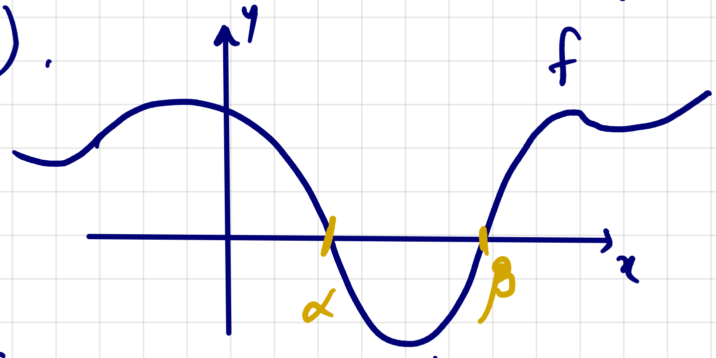
$$a.\underbrace{(\alpha - \beta)}_{\leq 0} \geq 0 \Rightarrow a < 0 \text{ ou } a = 0,$$

mas $a = 0$ é a função constante.

Logo, obtemos $a < 0$, o que conclui a demonstração

$\square$

Def.: Chama-se ZERO de uma função $y = f(x)$ todo $x \in D(f)$ tal que $f(x) = 0$ (Ou seja, os zeros de f são os interceptos do gráfico de f com o eixo horizontal).



[α e β são zeros de f pois $f(\alpha) = 0$ e $f(\beta) = 0$]

No caso da função afim, $f(x) = ax + b$; os zeros serão os pontos onde $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Ou seja, a função afim possui apenas um zero.

No exemplo dado anteriormente; $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 2x - 3$

temos o zero: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

INTERCEPTO COM O EIXO OX.

FUNÇÃO QUADRÁTICA: É a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$f(x) = ax^2 + bx + c$; com $a \neq 0$.

zeros da função quadrática: são os pontos onde $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$

$$a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} \right) = 0$$

Vamos identificar / completar um quadrado perfeito como segue.

$$x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = (x + \alpha)^2 + \beta$$

$$= x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{b}{2a} \\ \alpha^2 + \beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \quad \beta = \frac{c}{a} - \alpha^2 = \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\beta = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$$

Ou seja, temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}$$

Assim, obtemos:

$$\underbrace{a}_{\neq 0} \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac - b^2}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^{\cancel{2}}} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ZEROS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA.

O gráfico da função quadrática chama-se PARÁBOLA.

CASO SIMPLES: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = ax^2$; $a > 0$.

zeros: $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

Neste caso não foi preciso usar a fórmula, chamada de Báskara, para encontrar os zeros de f.

Neste caso, $y = ax^2$, note que o gráfico de f tocará o eixo horizontal na origem e como $a>0$, $ax^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, o gráfico fica sempre acima do eixo Ox.

Além disso, $f(x) = ax^2$, em $(0, +\infty)$ é crescente:

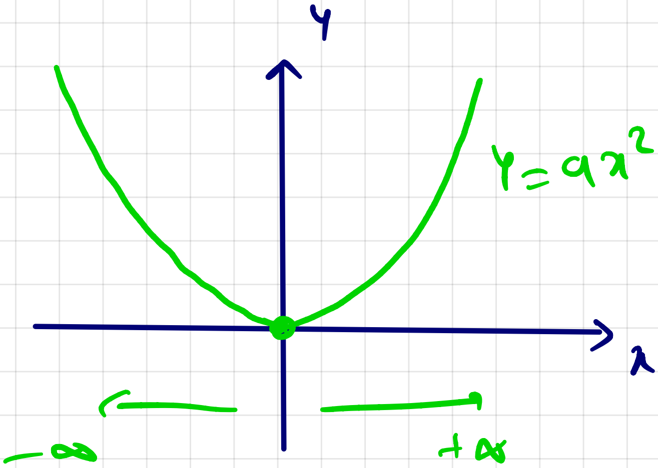
$$0 < \alpha \leq \beta \Rightarrow a \cdot \alpha^2 \leq a \cdot \beta^2 ;$$

e é decrescente em $(-\infty, 0)$:

$$\alpha \leq \beta < 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} \alpha^2 \geq \beta^2$$

$$\Rightarrow a \cdot \alpha^2 \geq a \cdot \beta^2 \quad (a>0)$$

$$\Rightarrow f(\alpha) \geq f(\beta)$$



(*) $\alpha \leq \beta < 0 \Rightarrow \alpha^2 \geq \beta^2$. De fato, se fosse falso, então, teríamos $\alpha^2 < \beta^2 \Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 < 0$

$$\Rightarrow \underbrace{(\alpha - \beta)}_{\leq 0} \cdot \underbrace{(\alpha + \beta)}_{< 0} < 0,$$ um absurdo.