Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos 3900, 3910, 6100 e 6400
Disciplina de Cálculo 1
Leitura e estudo complementar

Em verdade vos digo...

Prof. Dr. Maurício Zahn. UFPel/IFM/DME

A imagem acima foi extraída do site "matematica.pt". Jesus Cristo ensinava seus discípulos e seguidores por meio de *parábolas*, que são narrativas alegóricas que transmitem uma mensagem indireta, por meio de comparação ou analogia.

Para montar o humor da tira acima, o autor usa a coincidência de nomes desse conceito e do conceito da função polinomial de segundo grau, também chamada de função quadrática, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \ a \neq 0,$$

cujo esboço gráfico chama-se uma *parábola*, onde a concavidade da mesma pode ser voltada para cima, se $a > 0$, ou voltada para baixo, se $a < 0$. Quando se estuda derivadas em Cálculo isso fica perfeitamente claro, analisando o sinal da derivada segunda de f.

Para determinar os *zeros* de uma função, que são os pontos onde a mesma intercepta o eixo horizontal, caso existam, basta verificar onde $f(x) = 0$.

No caso da parábola, basta resolver a equação de segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

e para isso, usamos a fórmula de Báskara para obter os zeros deste tipo de função. Recordemos apenas, aqui, que os zeros para $f(x) = ax^2 + bx + c$ são

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Note que, pelo fato de Δ ser um radicando, tiramos as seguintes conclusões quanto à análise das raízes:

- Se $\Delta > 0$, então a função quadrática tem duas raízes reais e distintas;
- Se $\Delta = 0$, então a função quadrática tem duas raízes reais e iguais;
- Se $\Delta < 0$, então a função quadrática não tem raízes reais.

Dada a parábola de equação $f(x) = ax^2 + bx + c$, já sabemos que os seus zeros, se existirem, são dados por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

que são os pontos onde f intercepta o eixo horizontal. Geometricamente, definimos a *abscissa do vértice* x_V como sendo exatamente o ponto médio do intervalo definido pelas raízes x_1 e x_2, ou seja, temos que x_V é dado por

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

Para obter a ordenada do vértive y_V basta calcular

$$y_V = f(x_V) = ax_V^2 + bx_V + c = a\frac{b^2}{4a^2} + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c =$$

$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Portanto, concluímos que as coordenadas do vértice de uma parábola são dadas por

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Vejamos alguns exemplos referentes à parábola.

Exemplo 1. Construindo o gráfico de $f(x) = ax^2$, com $a > 0$.
Inicialmente, estudemos o sinal da f. Note que o único zero ou raiz é $x = 0$, pois

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Note que $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f(x) > 0$, logo o gráfico da f, ou seja, a parábola, estará acima do eixo horizontal e toca o eixo horizontal em $x = 0$, como vimos acima.

As coordenadas do seu vértice serão

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{0}{2a} = 0,$$

e

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{0^2 - 4 \cdot a \cdot 0}{4a} = 0,$$

ou seja, temos $V(0, 0)$ como vértice para a parábola $y = ax^2$.

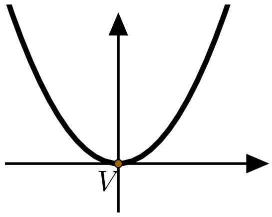
Notamos também que $\forall x > 0$ a função é crescente estritamente, pois

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow ax_1^2 < ax_2^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

e $\forall x < 0$ a função é decresente estritamente, pois

$$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow -x_1 > -x_2 > 0 \Rightarrow x_1^2 = (-x_1)^2 > (-x_2^2) = x_2^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ax_1^2 > ax_2^2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Assim, de acordo com os resultados acima, concluímos que o esboço gráfico de $f(x) = ax^2$, com $a > 0$ é representado pela ilustração abaixo (para o esboço usamos $a = 1$).



Exemplo 2. Vamos esboçar o gráfico de $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

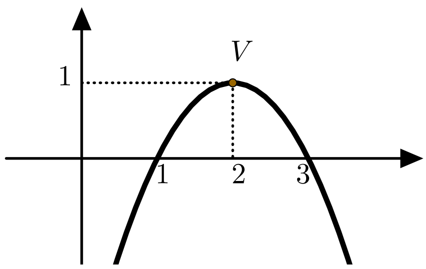
Observe primeiramente, que, como $a = -1 < 0$, a parábola possuirá concavidade voltada para baixo. Vamos determinar os seus zeros:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } \quad x = 1.$$

As coordenadas do vértice $V(x_V, y_V)$ serão

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = 2 \text{ e } y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4}{4(-1)} = 1.$$

Com isso, marcando os zeros $x = 1$ e $x = 3$, o vértice $V(2, 1)$ e notando que o gráfico da parábola possui concavidade voltada para baixo, pois $a = -1 < 0$, temos que seu esboço gráfico será



Assim como Jesus, esperamos que, com essas parábolas, tenhamos conseguido passar nossa mensagem. E, para exercitar nosso *evangelho*, que tal resolver os exercícios abaixo?

Exercícios

1. Esboce o gráfico de cada função quadrática abaixo, identificando as coordenadas do vértice.

   (a) $f(x) = x^2 + 3x - 10$ (b) $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$

   (c) $f(x) = 5x - x^2$ (d) $f(x) = x^2 - 8x + 12$