CÁLCULO 3

06/05/24 - AULA 09

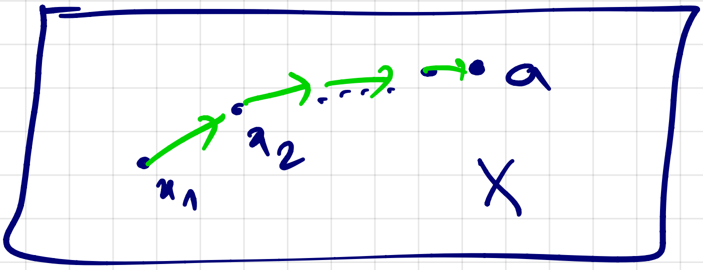
AULA DE EXERCÍCIOS:

L1:

5. Mostre que uma sequência (x_n) converge para a em (X, d) se, e somente se, a sequência $(d(a, x_n))$ converge para 0 em $\mathbb{R}$ com a métrica usual.

(X, d)

$x_n \to a \iff d(a, x_n) \to 0$



Dado $\varepsilon > 0$.

Suponha que $x_n \to a$. Então, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$. $(*)$

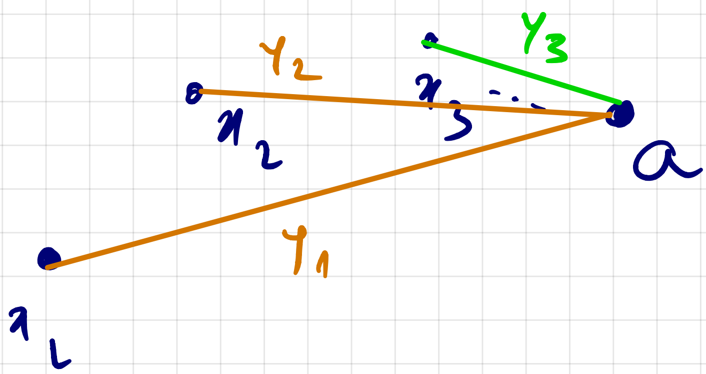
Considere em $\mathbb{R}$ a seq. $y_n = (d(a, x_n))$

$y_1 = d(a, x_1)$

$y_2 = d(a, x_2)$

$y_3 = d(a, x_3)$

$\vdots$



AF: $y_n \to 0$.

De fato, para o $\varepsilon > 0$ dado,

precisamos achar $n_1 \in \mathbb{N}$ $(n_1 = n_1(\varepsilon))$, tal que, $\forall n \geq n_1 \Rightarrow |y_n - 0| < \varepsilon$.

Analisando $|y_n - 0|$:

$$|y_n - 0| = |y_n| = |d(a, x_n)| = d(a, x_n) =$$

$$= d(x_n, a) < \varepsilon \quad , \quad \forall n \geq n_0$$

simetria

por (*)

Ou seja, basta tomar $n_1 = n_0$.

Isto prova que $y_n \to 0$, ou seja,

$$d(a, x_n) \to 0$$

Reciprocamente, suponha que $y_n := d(a, x_n) \to 0$

A mostrar: $x_n \to a$.

Dado $\varepsilon > 0$.

Como $y_n \to 0$, então, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |y_n - 0| < \varepsilon$.

Então:

$$\varepsilon > |y_n - 0| = |d(a, x_n)| = d(x_n, a), \forall n \geq n_0$$

Ou seja, $d(x_n, a) < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$,

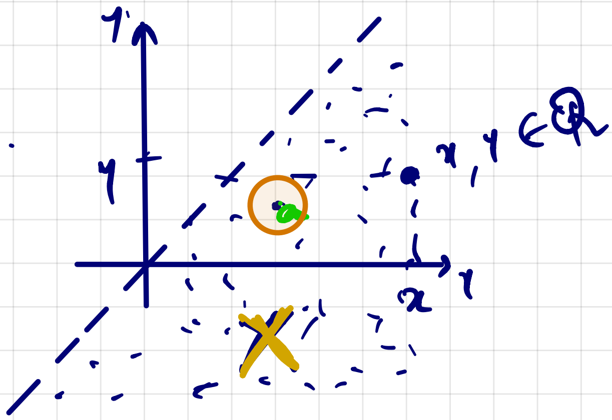
i.e., $x_n \to a$.

$\square$

L1.

10. Qual é o interior do conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 : x < y\}$ em relação a $\mathbb{R}^2$? Justifique.

$X = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 : x < y\}$.



Lembre-se: dado $X \subset \mathbb{R}^2$, o interior de X, denotado por $\text{int}(X)$, é o conj. de todos os pontos interiores do conj. X.

Lembre-se também que $a \in X$ é um ponto interior de um conj. $X \subset \mathbb{R}^2 \iff \exists\, \delta > 0$ tal que

$$B_\delta(a) \subset X.$$

Porém, $\forall\, P \in X$, qualquer $\delta > 0$, $B_\delta(P) \not\subset X$, pois possuirá pontos dentro desta bola com alguma das coordenadas não racional. Ou seja, a bola não fica inteiramente contida no conj X.

Isto se deve à propriedade de DENSIDADE dos racionais e dos irracionais em $\mathbb{R}$. Ou seja, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, $\exists\ a \in \mathbb{Q}$ tal que $x < a < y$ e $\exists\ b \in \mathbb{I}$ tal que $x < b < y$.

CONCLUSÃO: $\text{int}\, X = \emptyset$.

L1:

15. Faça o desenho de cada região do $\mathbb{R}^2$ abaixo, identificando e justificando se a mesma é um aberto, ou fechado ou nem aberto e nem fechado do $\mathbb{R}^2$. Identifique o seu fecho e a sua fronteira. Decida também se algum deles é compacto do $\mathbb{R}^2$.

(a) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; 4 < x^2 + y^2 \leq 9\}$

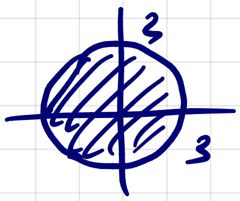
(b) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; d_1((x, y), (1, 0)) < 1\}$

(c) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 - xy < 1\}$

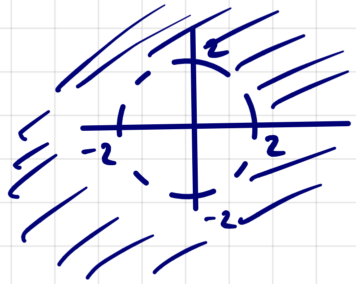
(d) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; d_\infty((x, y), (0, 1)) \leq 1\}$

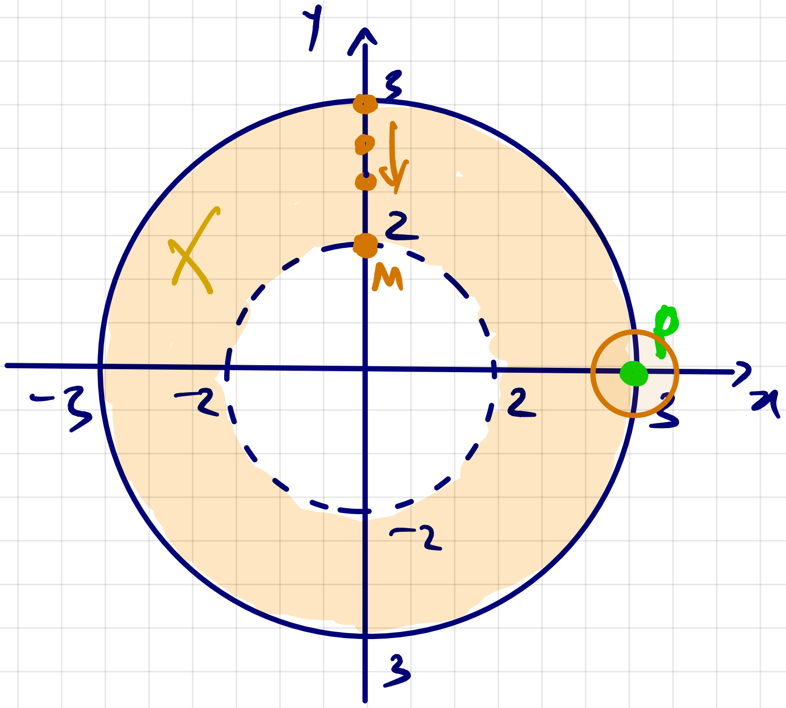
(a) $4 < x^2+y^2 \leq 9$

$x^2+y^2 \leq 9.$



$x^2+y^2 > 4$





X não é aberto e nem fechado do $\mathbb{R}^2$, pois:

- não é aberto porque; por exemplo, $P(3,0) \in X$, mas, $\forall \delta > 0$, $B_\delta(P) \not\subset X$. Logo $P \notin \operatorname{int} X$.
  Então, X não é aberto.
- não é fechado, pois; por exemplo tome o

ponto $M(0,2) \notin X$, mas $\exists\,(x_n) \subset X$ tal que $x_n \to M$ (reg. vertical desenhada no esquema acima).

$$\partial X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4 \text{ e } x^2+y^2=9\}.$$

$$\overline{X} = X \cup \partial X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2+y^2 \leq 9\}.$$

X não é compacto, pois embora seja limitado, ele não é fechado.

(c) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy < 1\}$.

$$-xy < 1 - x^2$$

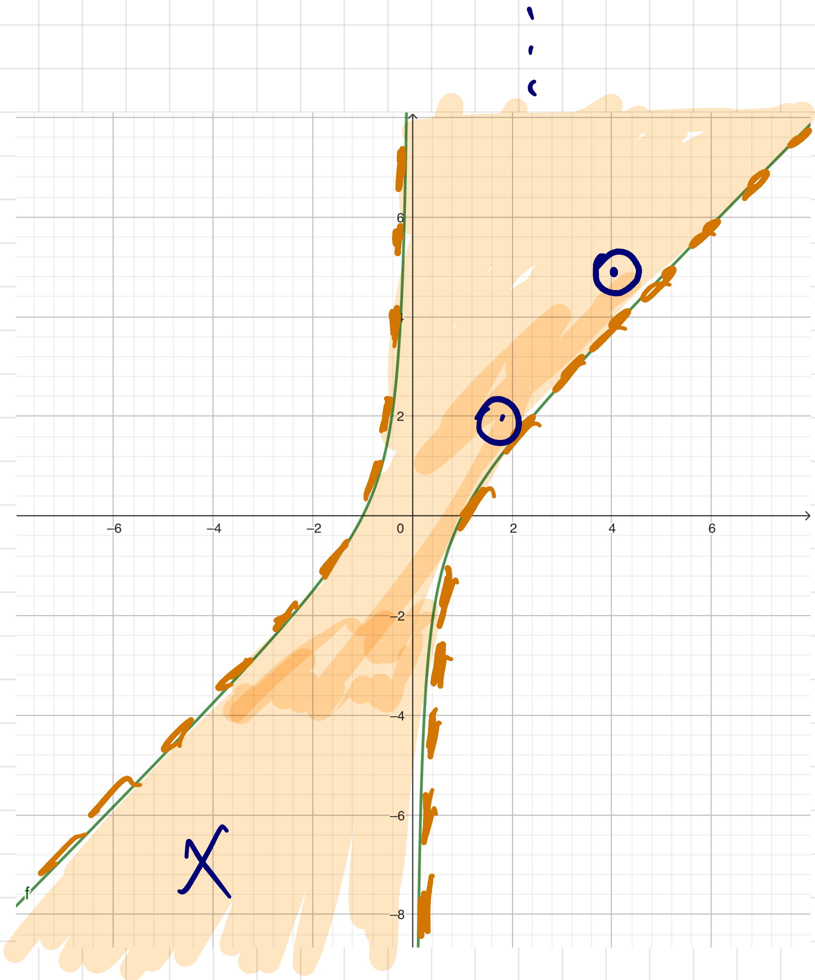
$$xy > x^2 - 1 \longrightarrow \begin{cases} y > \dfrac{x^2-1}{x}, & \text{se } x > 0 \\[2mm] y < \dfrac{x^2-1}{x}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Ou seja,
$$\begin{cases} y > x - \dfrac{1}{x}, & \text{se } x > 0 \\[2mm] y < x - \dfrac{1}{x}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

A ideia agora é esboçar c.f. CL, o gráfico de $y = x - \frac{1}{x}$. Vamos considerar, depois,

a região onde $y > x - \frac{1}{x}$, na parte onde $x > 0$,
e a região onde $y < x - \frac{1}{x}$, na parte onde $x < 0$.

$$y = x - \frac{1}{x}. \qquad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$



X é aberto, pois, $\forall P \in X$; $\exists\, \delta > 0$ tal que $B_\delta(P) \subset X$. , i.e., todo ponto de X é interior.

$$\partial X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy = 1\}$$

$$\overline{X} = X \cup \partial X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy \leq 1\}$$

X não é compacto pois não é limitado e nem fechado.