CÁLCULO I

03/05/24 – AULA 08

Os exercícios da aula passada:

05) $$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{5}}{x^2-1} = \frac{0}{0}$$ (INDETERMINAÇÃO)

↓

$x-(-1)$ APARECE NO NUM. E NO DENOM.

$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{5}}{x^2-1} \times \frac{\sqrt{2-3x}+\sqrt{5}}{\sqrt{2-3x}+\sqrt{5}} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(\sqrt{2-3x})^2-(\sqrt{5})^2}{(x^2-1)(\sqrt{2-3x}+\sqrt{5})} = \lim_{x\to -1} \frac{2-3x-5}{(x^2-1)(\sqrt{2-3x}+\sqrt{5})}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{-3(\cancel{x+1})}{\cancel{(x+1)}\cdot(x-1)(\sqrt{2-3x}+\sqrt{5})} = \lim_{x\to -1} \frac{-3}{(x-1)(\sqrt{2-3x}+\sqrt{5})}$$

$$= \frac{-3}{(-1-1)(\sqrt{2-3(-1)}+\sqrt{5})} = \frac{-3}{-2.(\sqrt{5}+\sqrt{5})} = +\frac{3}{4\sqrt{5}}$$

06) $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x-1}}{x^2+x-2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{1+1-2} = \frac{0}{0}$$

(INDET.)

[$x-1$ deve ser simplificado.]

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x-1}}{x^2+x-2} \times \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3x-1}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left(\cancel{\sqrt{x^2+1}}\right)^{\cancel{2}} - \left(\cancel{\sqrt{3x-1}}\right)^{\cancel{2}}}{(x^2+x-2)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3x-1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+1-3x+1}{(x^2+x-2)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3x-1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{x^2-3x+2}^{0}}{(\underbrace{x^2+x-2}_{0})\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3x-1}\right)} =$$

$$\begin{array}{l|l}
x^2-3x+2 & x-1 \\ \hline
-x^2+x & x-2 \\ \hline
-2x+2 & \\
+2x-2 & \\ \hline
0 &
\end{array}
\quad \Rightarrow x^2-3x+2 = (x-1)\cdot(x-2)$$

$$\begin{array}{l|l}
x^2+x-2 & x-1 \\ \hline
-x^2+x & x+2 \\ \hline
2x-2 & \\
-2x+2 & \\ \hline
0 &
\end{array}
\quad \Rightarrow x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x-2)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x+2)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3x-1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{(x+2)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3x-1}\right)} = \frac{1-2}{(1+2)(\sqrt{2}+\sqrt{2})} =$$

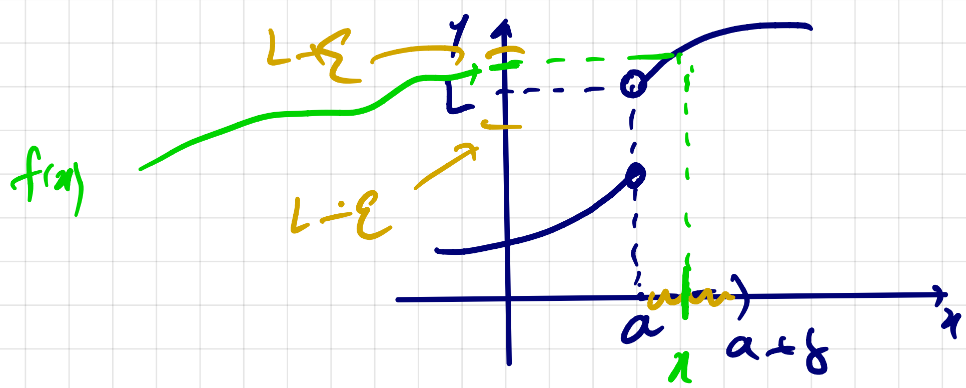
$$= -\frac{1}{3\cdot(2\sqrt{2})} = -\frac{1}{6\sqrt{2}}.$$

LIMITES LATERAIS:

Def.: Seja $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in A'_+$ (ou seja, $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação à direita(*) do conjunto A). Definimos:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0 \text{ tal que, } \forall x\in A:$$

$$a < x < a+\delta \implies |f(x)-L| < \varepsilon.$$



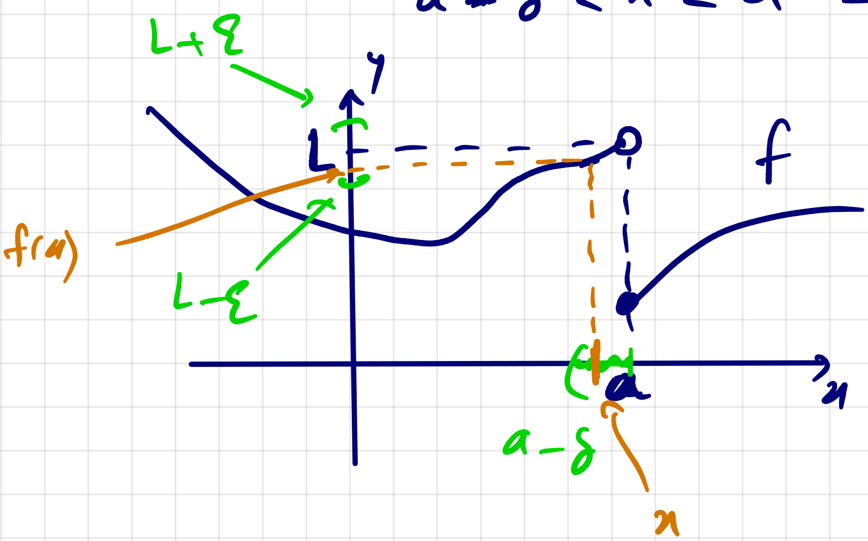
(*) ou seja, situações como:

Analogamente definimos o limite à esquerda:

$f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $a \in A'_-$ (a é ponto de acumulação à esquerda de A). Então:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \overset{\text{def.}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, } \forall x \in A:$$

$$a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$



Em palavras: o limite à direita é uma aproximação para L à direita de $x = a$; já o limite à esquerda é uma aproximação para L à esquerda de $x = a$.

Note que, pelo acima exposto temos o seguinte resultado.

PROP.: $\exists \lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

Ou seja, existe o limite se, e somente se, os limites laterais existirem e forem iguais.

Ex.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x \geq 1 \\ x^2, & \text{se } x < 1. \end{cases}$

Perguntamos: $\exists \lim_{x \to 1} f(x)$?

Note que:

- $\underbrace{\lim_{x \to 1^-}}_{} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = (1)^2 = 1.$

POR VALORES LIGEIRAMENTE MENORES QUE 1.

1

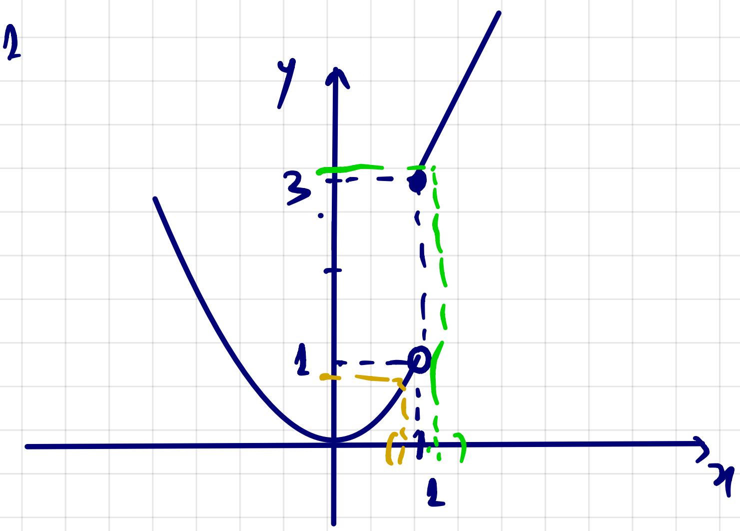
- $\underbrace{\lim_{x \to 1^+}}_{} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x+1) = 2.(1)+1 = 3.$

POR VALORES LIGEIRAMENTE MAIORES DO QUE 1.

1

Então, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \neq 3 = \lim_{x \to 1^+} f(x)$.

Portanto, $\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$.



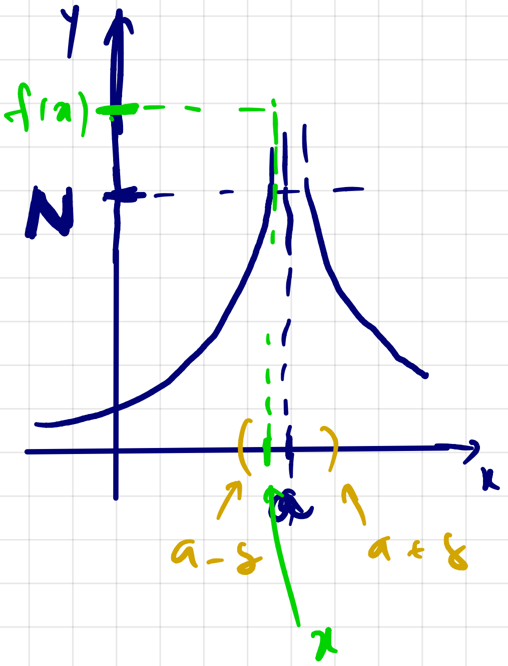
LIMITES INFINITOS:

Def.: Seja $f: A \to \mathbb{R}$ função e $a \in A'$.

Definimos:

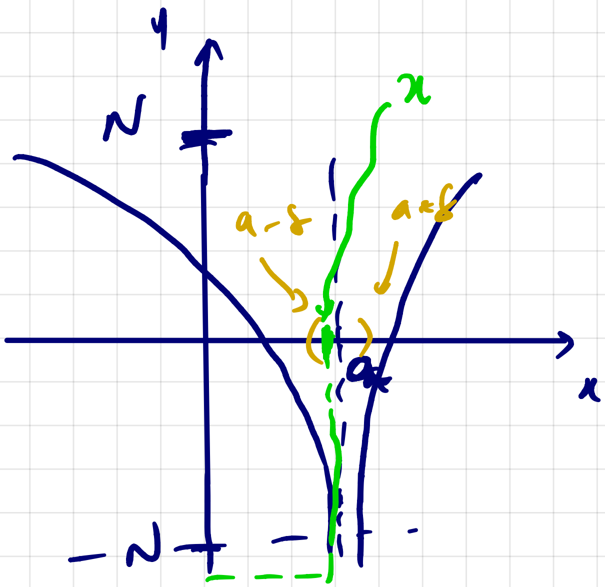
- $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \overset{\text{def.}}{\iff} \forall N > 0, \exists \delta > 0$ tal que;

$$\forall x \in A : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > N.$$

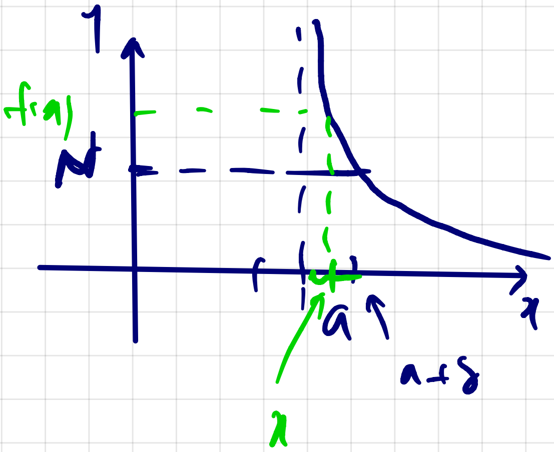


- $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \overset{\text{def.}}{\iff} \forall N > 0, \exists \delta > 0$ tal que

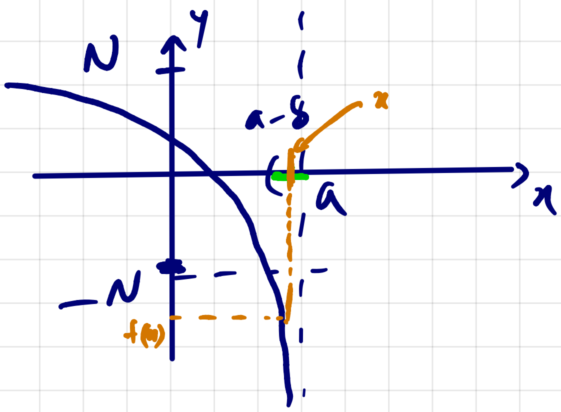
$$\forall x \in A : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -N$$



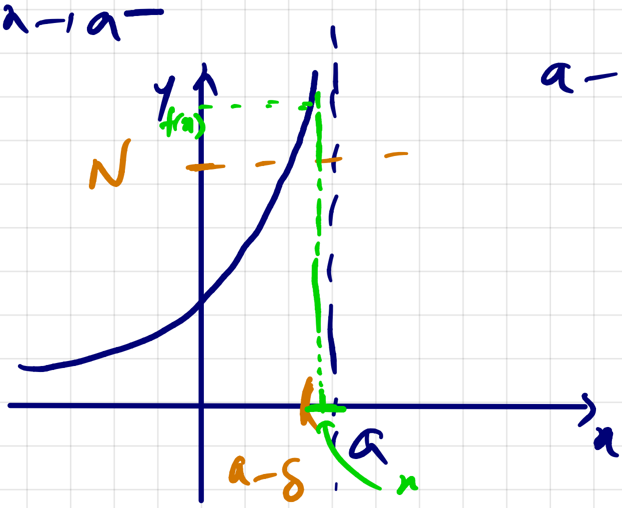
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \overset{\text{def}}{\iff} \forall N>0, \exists \delta>0$ tal que, $\forall x \in A$:
$a < x < a+\delta \Rightarrow f(x) > N$



- $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \overset{\text{def.}}{\iff} \forall N>0, \exists \delta>0$ tal que, $\forall x \in A$:
$a < x < a+\delta \Rightarrow f(x) < -N$



- $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \overset{\text{def.}}{\iff} \forall N>0, \exists \delta>0$ tal que, $\forall x \in A$,
$a-\delta < x < a \Rightarrow f(x) > N.$

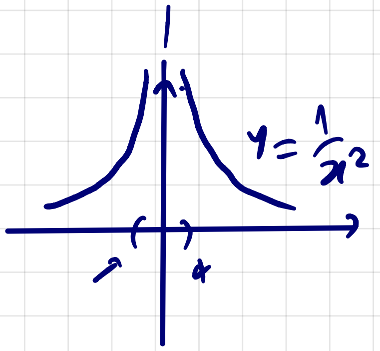


• $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \overset{\text{def.}}{\iff} N > 0, \exists \delta > 0$ tal que, $\forall x \in A$:

$$a-\delta < x < a \Rightarrow f(x) < -N$$

Vejamos alguns exemplos:

01) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$:



Dado $N > 0$, precisamos achar $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in \mathbb{R}$: $0 < |x-0| < \delta$ implique $f(x) > N$.

Basta tomar $\delta < \frac{1}{\sqrt{N}}$:

Rascunho:

$f(x) > N$

$\frac{1}{x^2} > N$

$x^2 < \frac{1}{N}$

$x < \sqrt{\frac{1}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}}$

De fato:

$0 < |x-0| = |x| < \frac{1}{\sqrt{N}}$, segue que $\frac{1}{|x|} > \sqrt{N}$. Assim

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{|x|}\right)^2 > (N)^2 = N.$$

Ou seja, mostramos que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

02) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{2}{1-x} = +\infty$. (MOSTRAR):

Dado $N>0$, precisamos achar $\delta>0$ tal que:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad 1-\delta < x < 1 \implies \frac{2}{1-x} > N.$$

$$0<\delta<1$$

Note que:

$$1-\delta < x < 1 \underset{\times -1}{\implies} \delta-1 > -x > -1 \underset{+1}{\implies}$$

VAMOS PROCURAR A PARTIR DAQUI CONSTRUIR A EXPRESSÃO $\frac{2}{1-x}$.

$$\implies \delta-1+1 > 1-x > -1+1 \implies 0 < 1-x < \delta$$

$$\implies \frac{1}{1-x} > \frac{1}{\delta} \underset{\times 2}{\implies} \frac{2}{1-x} > \frac{2}{\delta} := N$$

TOMANDO OS INVERSOS

Ou seja, dado $N>0$ basta tomar $\delta = \frac{2}{N} > 0$:

$$1-\delta < x < 1 \implies \frac{2}{1-x} > \frac{2}{\delta} = N,$$

ou seja, provamos que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2}{1-x} = +\infty.$$

03) $\displaystyle\lim_{x \to -2^+} \frac{3}{2+x} = +\infty.$ (exercício)