

Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo I
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 03 de Exercícios - Limites

1. Usando a definição de limite, prove que

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4 \quad (b) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{3} \quad (c) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}, a > 0 \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

2. Mostre que se $\lim_{x \rightarrow 3} xf(x) = 12$, então existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ e é igual a 4.

3. Dê um exemplo em que $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x))$ existe mas nem $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e nem $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ existem.

4. Use a propriedade do limite de um quociente visto em aula para provar que se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existir e for diferente de zero, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}.$$

5. Considere a *função de Dirichlet* $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ for racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ for irracional} \end{cases}$$

Afirmamos que $\forall a \in [0, 1], \nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Por quê?

6. Calcule cada limite a seguir, se existir¹:

$$\begin{array}{lll}
 (a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} & (b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} & (c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 + 5x - 6} \\
 (d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} & (e) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3} & (f) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\
 (g) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} & (h) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} & (i) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}} \\
 (j) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} & (k) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} & (\ell) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1 - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2+x-1} - 1} \\
 (m) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x^2 - 1} & (n) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{x^2-3} - \sqrt[4]{x-1}}{x^2 - 4} & (o) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x + 11}{1 - x - 5x^2} \\
 (p) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 7x + 2}{2x^2 - 14x + 8} & (q) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 11}{1 - 7x} & (r) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - 4x^3 + 2}{3 - 5x^3 - 2x^7} \\
 (s) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} & (t) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 5x + 6} - x & (u) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2} \\
 (v) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} \frac{2+x}{3x-1} & (x) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{|x-1|} & (y) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+a} - \sqrt{x}
 \end{array}$$

¹Respostas:

$$\begin{array}{llllllllll}
 (a) 27 & (b) -2 & (c) \frac{2}{7} & (d) \frac{1}{2} & (e) \frac{a-1}{3a^2} & (f) na^{n-1} & (g) \frac{1}{4} & (h) -\frac{1}{56} & (i) \frac{1}{4} & (j) -\frac{1}{3} & (k) \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 (\ell) \frac{1}{3} & (m) \frac{1}{24} & (n) \frac{1}{4} & (o) -\frac{3}{5} & (p) -\infty & (q) -\infty & (r) 0 & (s) 0 & (t) -\frac{5}{2} & (u) +\infty & (v) -\infty \\
 (x) -1 & (y) 0 & & & & & & & & &
 \end{array}$$

7. Supondo que vale a seguinte cadeia de desigualdades

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4},$$

prove que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

8. Seja f uma função tal que para todo $x \neq 0$, $-x^2 + 3x \leq f(x) < \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ e justifique.

9. Suponha que para todo x , $|g(x)| \leq x^4$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$.

10. Dada a função f em cada item, faça o seu esboço gráfico e ache o limite indicado, justificando sua existência ou não.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 2 \\ 8 - 2x, & \text{se } x > 2. \end{cases}$ (i) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, (iii) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

(b) $f(x) = \frac{|x|}{x}$. (i) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

11. Dada $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq -2 \\ ax + b, & \text{se } -2 < x < 2 \\ 2x - 6, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$, ache os valores de a e b tais que existam os limites $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

12. Dados $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{se } x \leq 1 \\ x + 1, & \text{se } 1 < x \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2, & \text{se } 1 < x \end{cases}$

(a) Mostre que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ existem, mas não são iguais e, portanto, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ não existe.

(b) Mostre que $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ existem, mas não são iguais e, portanto, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ não existe.

(c) Ache as fórmulas que definem $f(x)g(x)$.

(d) Prove que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x)$ existe, mostrando que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x)$.