

Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos 3900, 3910, 6100 e 6400
Disciplina de Cálculo 1
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 1 de Exercícios - Conjuntos e Funções.

1. Dados os intervalos $A = [-3, 2]$, $B = (-1, 6)$ e $C = (-\infty, -1)$, obtenha o resultado de cada operação abaixo:

(a) $A \cup B$ (b) $A \setminus B$ (c) $A \cap C$ (d) $A \setminus C$ (e) $B \setminus A$ (f) $B^c \setminus (B \cap C)$

2. Encontre os valores de $x \in \mathbb{R}$ que verificam cada desigualdade abaixo.

(a) $5x + 2 > x - 6$ (b) $3x - 5 < \frac{3}{4}x + \frac{1-x}{3}$ (c) $2 \leq 5 - 3x \leq 11$

(d) $\frac{2}{1-x} \leq 1$ (e) $\frac{1}{3x-7} \geq \frac{4}{3-2x}$ (f) $|2x - 4| \leq 2$

(g) $\left| \frac{2-x}{3x-1} \right| \leq \frac{2}{3}$ (h) $\left| \frac{1}{x-2} - \frac{x}{3} \right| \leq 1$ (i) $\left| \frac{2x-4}{2-3x} \right| \leq \frac{1}{4}$

3. As funções f e g cujas leis são

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

são iguais? Justifique.

4. Sejam $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, $g : \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{2}\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dadas respectivamente por

$$f(x) = -\frac{1+x}{2}; \quad g(x) = 2x - 5 \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{1}{x}.$$

Justifique por que é possível montar a composição $u = f \circ h \circ g$. Em seguida, determine a função $u : A \rightarrow B$ exibindo quem é o domínio A e quem é o contradomínio B .

5. Construa o gráfico de cada função a seguir, indicando domínio e imagem.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{se } x \geq 1 \\ x - 1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = |2x - 2| + |x + 3|$

(c) $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$

(d) $f(x) = (x^2 - 1) + |x^2 - 1| + 1$

6. Esboçar os gráficos de $f(x) = x|x|$, $g(x) = x - |x|$, $h(x) = (x - 1)|x + 1|$ e $i(x) = 1 + |x - |x||$, indicando seus respectivos domínio e imagem.

7. Represente geometricamente a região do plano cartesiano onde $g(x) > 0$ e $i(x) \leq 0$, sendo g e i as funções dadas no exercício anterior.

8. A equação para o decaimento do gás radônio 222 é $y = y_0 e^{-0,18t}$, sendo t expresso em dias. Quanto tempo será necessário para que o radônio presente em uma atmosfera de ar (em recipiente hermético) decaia 90% de sua quantidade inicial?

9. Uma pessoa deposita uma quantia em um banco que remunera à taxa de 1% ao mês. Em quantos meses a quantia depositada dobrará?
10. Estima-se que a população de uma cidade cresça 2% a cada 5 anos.
 - (a) Qual é o crescimento estimado para um período de 20 anos?
 - (b) E em um período de t anos?
11. As bactérias em um recipiente se reproduzem de forma tal que o aumento do seu número em um intervalo de tempo de comprimento fixo é proporcional ao número de bactérias presentes no início do intervalo. Suponhamos que, inicialmente, haja 1000 bactérias no recipiente e que, após 1 hora, este número tenha aumentado para 1500. Quantas bactérias haverá cinco horas após o início do experimento?
12. Qual é a *meia vida*¹ de um material radioativo que sofre desintegração de 20% de sua massa em um período de 1 ano?
13. A meia vida de certa substância radioativa é 12 horas. Inicialmente há 8 gramas da substância radioativa.
 - (a) Expresse a quantidade remanescente da substância em função do tempo t .
 - (b) Em quanto tempo restará apenas 1 grama de material contendo o elemento radioativo?
14. Em uma caverna da França, famosa pelas pinturas feitas por homens pré-históricos, foram encontrados pedaços de carvão vegetal, nos quais a radioatividade de C^{14} era 0,145 vezes a radioatividade num pedaço de carvão feito hoje. Calcule a idade do carvão e apresente uma estimativa para a época em que as pinturas foram feitas (Obs.: A meia vida do C^{14} é 5730 anos).
15. Um quadro de Vermeer (1632-1675) ainda contém 99,5% de seu carbono-14 (meia vida de 5730 anos). A partir dessa informação, você pode determinar se o quadro é ou não falsificado? Justifique.
16. Um reator converte urânio 238, estável, no isótopo plutônio 239. O decaimento deste isótopo é dado por $A(t) = A_0 e^{-0,00002876t}$, onde $A(t)$ é a quantia do isótopo no instante t , em anos, e A_0 é a quantia original.
 - (a) Se $A_0 = 500$, quanto restará após um período de vida humana? (use $t = 70$ anos)
 - (b) Encontre a meia-vida deste isótopo.
17. Um medicamento é ministrado por via intravenosa para aliviar a dor. A função $f(t) = 90 - 52 \ln(1 + t)$, $0 \leq t \leq 4$, dá o número de unidades do medicamento remanescentes no corpo depois de t horas.
 - (a) Qual foi a quantidade inicial ministrada em termos de unidades do medicamento?
 - (b) Quantas unidades estarão presentes depois de duas horas?

¹Nos processos radioativos, meia-vida ou período de semidesintegração de um radioisótopo é o tempo necessário para desintegrar a metade da massa deste isótopo, que pode ocorrer em segundos ou em bilhões de anos, dependendo do grau de instabilidade do radioisótopo. Ou seja, se tivermos 100kg de um material, cuja meia-vida é de 100 anos, depois desses 100 anos, teremos 50kg deste material. Mais 100 anos e teremos 25kg e, assim, sucessivamente.

(c) Desenhe o gráfico de f .

18. As indicações R_1 e R_2 , na *escala Richter*, de dois terremotos estão indicados pela fórmula

$$R_1 - R_2 = \log \frac{E_1}{E_2},$$

onde E_1 e E_2 medem a energia liberada pelos terremotos sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre.

A tabela abaixo mostra algumas medidas, onde alguns dados estão faltando. Complete a tabela, de acordo com as definições dadas e seus conhecimentos.

R_1	R_2	E_1	E_2
8	6	10	
5	7		13
	9	2	20
7	7	10	10

19. Esboçar o gráfico de cada função cuja lei é dada em cada item a seguir, indicando domínio e imagem.

(a) $f(x) = 1 + 2^{x-1}$

(b) $f(x) = |1 - 2^{x-1}|$

(c) $f(x) = \log_2(x - 3)$

(d) $f(x) = 1 - 2 \log_2(1 - x)$

(e) $f(x) = |1 - \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)|$

(f) $f(x) = 1 + \ln(x - 2)$

20. Obtenha o domínio máximo Ω da função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2x+4}} - \ln \sqrt{(x+1)}.$$

21. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 2)$ dada por $f(x) = 2 - 2^{1+x}$. Obtenha f^{-1} e construa num mesmo plano cartesiano os gráficos de f e f^{-1} , indicando domínio e imagem de cada uma.

22. Determine o domínio máximo de cada função a seguir.

(a) $f(x) = \frac{x^2 - 7x^3 + \sqrt{x}}{3x - 6} + \ln(x^2 - 4x) - \pi^{1-x}$

(b) $f(x) = \frac{\sqrt{x - 3x^2}}{2 - x} + 3 \log_{2+x}(x - 1) - \frac{7}{\sqrt{x}}$.

23. Escoça o gráfico de cada função abaixo, indicando o domínio e a imagem:

(a) $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$

(b) $f(x) = |2x - 2| + |x + 3|$

(c) $f(x) = 1 + \log_2(x - 3)$

(d) $f(x) = \left| 1 - 2 \cdot \operatorname{sen} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right|$

(e) $f(x) = 1 - 2 \operatorname{sec} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$

(f) $f(x) = \frac{\pi}{3} + \arccos(1 - x)$

24. Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 2x - \frac{4\pi}{3}$ e $g(x) = 1 + 2 \operatorname{sen} x$. Esboçar o gráfico de $g \circ f$, indicando domínio e imagem.