CÁLCULO 1.

25/04/24 - AULA 03

wp.ufpel.edu.br/zahn

Apresentamos na aula passada o conceito de corpo e o corpo ordenado e completo $\mathbb{R}$ dos números reais. Vamos apresentar o importante conceito de módulo.

Def.: Definimos o módulo de um número real x por

$$|x| = \text{máx}\{x, -x\}.$$

Ex.: $|-3| = \text{máx.}\{-3, -(-3)\} = \text{máx.}\{-3, 3\} = 3$

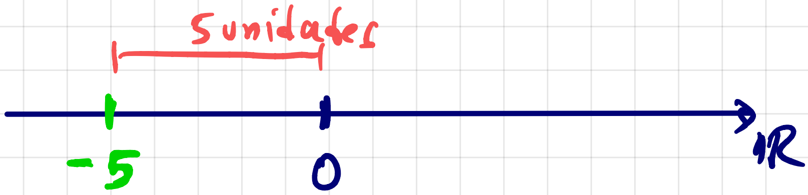
Uma outra forma de definir o módulo é escrever

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Observe que, $\forall x \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

Geometricamente, $|x|$ nos fornece a distância de $x \in \mathbb{R}$ até a origem 0 da reta real:



$$|-5| = 5 = \text{dist.}(-5,0)$$

PROPOSIÇÃO 1: Seja $a>0$. Então,

$$|x| \le a \iff -a \le x \le a.$$

DEMONSTR.:

$$|x| = \max\{x,-x\} \le a \iff$$

$$\iff x \le a \ \text{ e } \ \underbrace{-x \le a}_{\times(-1)}$$

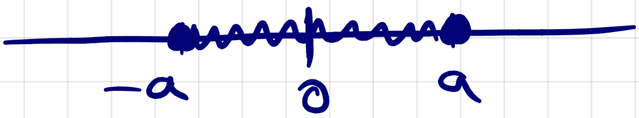
$$\iff x \le a \ \text{ e } \ x \ge -a$$

$$\iff -a \le x \le a$$

$\square$

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO PARA $|x| \le a$:

$$|x| \le a \iff -a \le x \le a$$

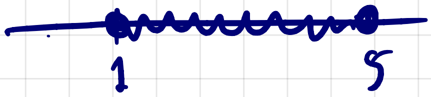


EX.: $|\overbrace{x-3}^{X}| \le 2$.

$$-2 \le x-3 \le 2 \qquad +3$$

$$-2+3 \le x\cancel{-3}\cancel{+3} \le 2+3$$

$$1 \leq x \leq 5.$$



Do mesmo modo, tem-se:

$$|x| < a \iff -a < x < a.$$

<u>PROPOSIÇÃO 2</u> Seja $a > 0$. Então,

$$|x| \geq a \iff x \geq a \text{ ou } x \leq -a.$$

<u>DEMONSTR.:</u> Define o conj. (para $a > 0$)

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < a\}.$$

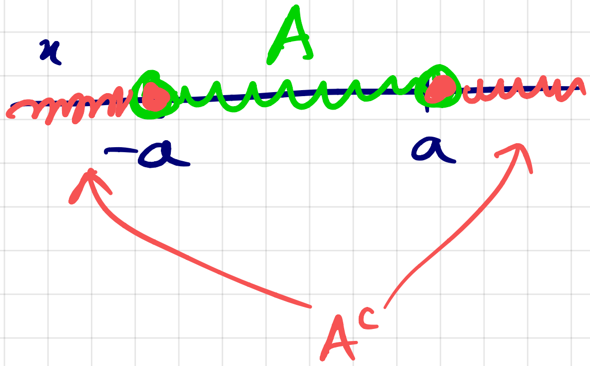
Então, $\forall x \in A$, tem-se $-a < x < a$; c.f. a proposição anterior.

Disso, seja o conj.:

$$A^c = \{x \in \mathbb{R} : |x| \not< a\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq a\}$$

Então, $x \in A^c \iff x \notin A$, e como para pertencer ao conj. A devemos ter $-a < x < a$, segue que $x \notin A \iff x \geq a$ ou $x \leq -a$.



Ou seja, $x \in A^c \iff x \geq a$ ou $x \leq -a$,

i.e.; $|x| \geq a \iff x \geq a$ ou $x \leq -a$.

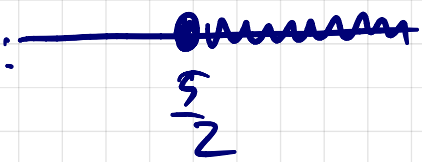
□

Ex.: $|2x-3| \geq 2$?

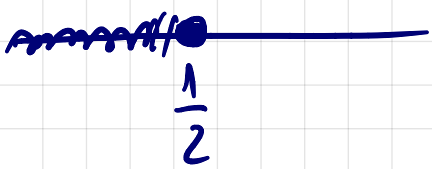
$$|\underbrace{2x-3}_{X}| \geq 2 \iff \begin{cases} 2x-3 \geq 2 & \text{(I)} \quad \text{ou} \\ 2x-3 \leq -2 & \text{(II)} \end{cases}$$

(I): $2x-3 \geq 2 \iff 2x \geq 2+3 \iff 2x \geq 5$

$$\iff \boxed{x \geq \frac{5}{2}}$$

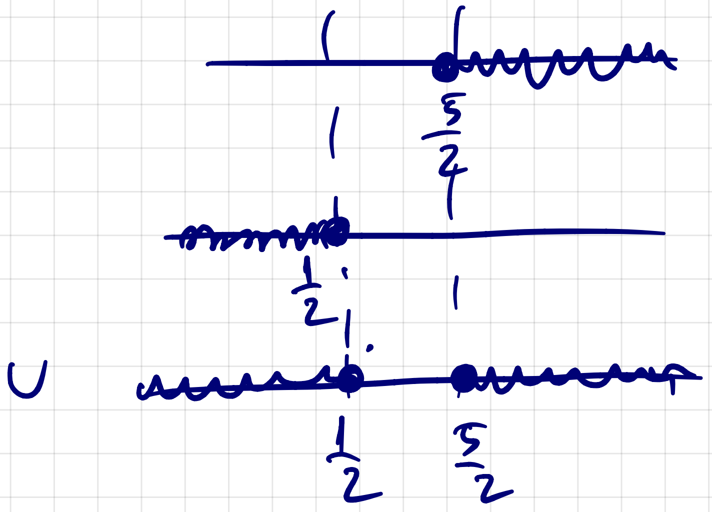
(I): 

(II): $2x-3 \leq -2 \iff 2x \leq -2+3 \iff 2x \leq 1 \iff x \leq \frac{1}{2}$



solução: (I) $\cup$ (II)

ou



$$S = \left(-\infty, \tfrac{1}{2}\right] \cup \left[\tfrac{5}{2}, +\infty\right).$$

PROPOSIÇÃO: Dados $x, y \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:

(i) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(ii) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, desde que $y \neq 0$.

(iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (desigualdade triangular)

(iv) $|x-y| \geq |x| - |y|$.

DEMONSTR.: Faremos a prova da desigualdade triangular.

Note que, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, temos:

$$
\begin{array}{rl}
 & -|x| \leq x \leq |x| \\
+ & -|y| \leq y \leq |y| \\
\hline
 & -|x| - |y| \leq x+y \leq |x| + |y|
\end{array}
$$

somando as desigualdades

$$\Rightarrow \quad -(\underbrace{|x|+|y|}_{a\geq 0}) \leq \underbrace{x+y}_{X} \leq \underbrace{|x|+|y|}_{a\geq 0}$$

$$-a \leq X \leq a.$$

$$\Updownarrow$$

$$|X| \leq a$$

$$\Updownarrow \text{ (PROP. 1)}$$

$$|x+y| \leq |x|+|y|.$$

$\square$

EXEMPLOS: Resolva cada inequação a seguir:

(a) $|2x-3| \leq 1$ (b) $\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right| \leq 1.$

(c) $\left|\dfrac{x}{2x-3}\right| \geq \dfrac{1}{2}$

SOLUÇÕES:

(a) $|2x-3| \leq 1 \iff -1 \leq 2x-3 \leq 1 \quad (+3)$

$$-1+3 \leq 2x-\cancel{3}+\cancel{3} \leq 1+3$$

$$2 \leq 2x \leq 4. \quad (\div 2)$$

$$1 \leq x \leq 2$$

$S = [1, 2]$

(b) $\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right| \le 1. \iff -1 \le \overbrace{\dfrac{x-1}{x+2} \le 1}^{(I)}.$

(II): $-1 \le \dfrac{x-1}{x+2}$

(I): $\dfrac{x-1}{x+2} \le 1 \iff \dfrac{x-1}{x+2} - \dfrac{1}{1} \le 0$

$$\iff \frac{x-1-1.(x+2)}{x+2} \le 0 \iff \frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-2}{x+2} \le 0$$

$$\iff \frac{-3}{x+2} \le 0 \quad (-1)$$

$$\iff \frac{3}{x+2} \ge 0$$

Estudemos os sinais do numerador e do denominador para, após efetuar uma divisão de sinais e considerar a parte onde resultar em ≥ 0

NUMERADOR: $3 > 0$

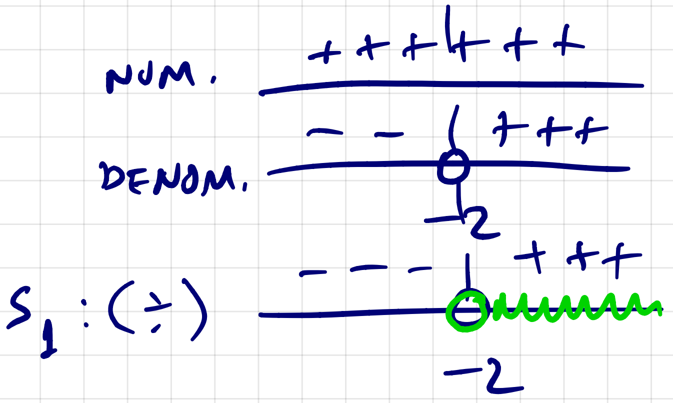
$+ \quad + \quad + \quad + \quad +$

DENOMINADOR $x+2=0$ $(\neq 0)$

$\iff x = -2$

$- \; - \; \underset{-2}{0} \; + \; +$

$$\begin{cases} \forall x < -2 \implies x+2 < 0 \\ \forall x > -2 \implies x+2 > 0 \end{cases}$$



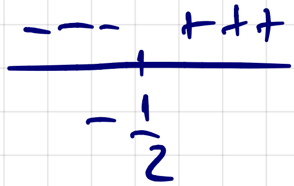
$$S_1 = (-2, +\infty)$$

(II) : $\dfrac{x-1}{x+2} \geq -1 \iff \dfrac{x-1}{x+2} + 1 \geq 0$

$$\iff \frac{x-1+x+2}{x+2} \geq 0 \iff \boxed{\frac{2x+1}{x+2} \geq 0}$$

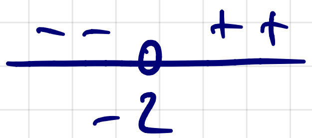
SINAL DO NUMERADOR: $2x+1=0 \iff 2x=-1$

$$\iff x = -\frac{1}{2}$$

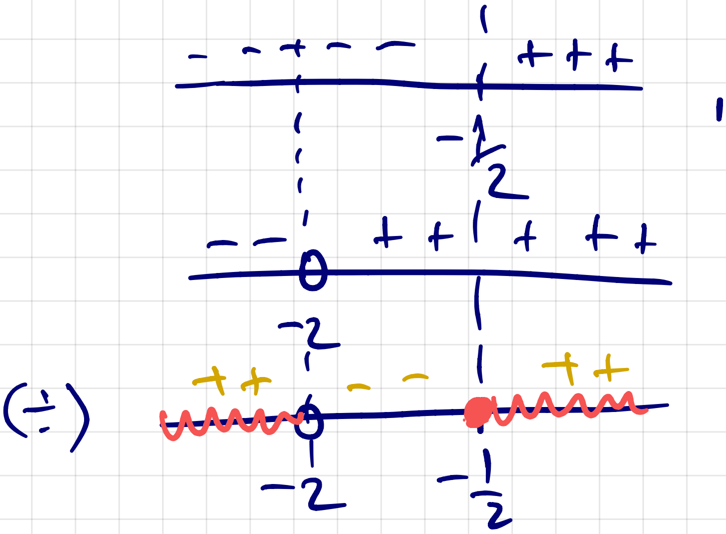


$$\begin{cases} \forall x < -\frac{1}{2} \overset{\times 2}{\Longrightarrow} 2x < -1 \\ \qquad \Longrightarrow 2x+1 < 0 \\ \forall x > -\frac{1}{2} \underset{\times 2}{\Longrightarrow} 2x > -1 \\ \qquad \Longrightarrow 2x+1 > 0 \end{cases}$$

SINAL DO DENOMINADOR $(\neq 0)$ (já feito na desigualdade anterior)



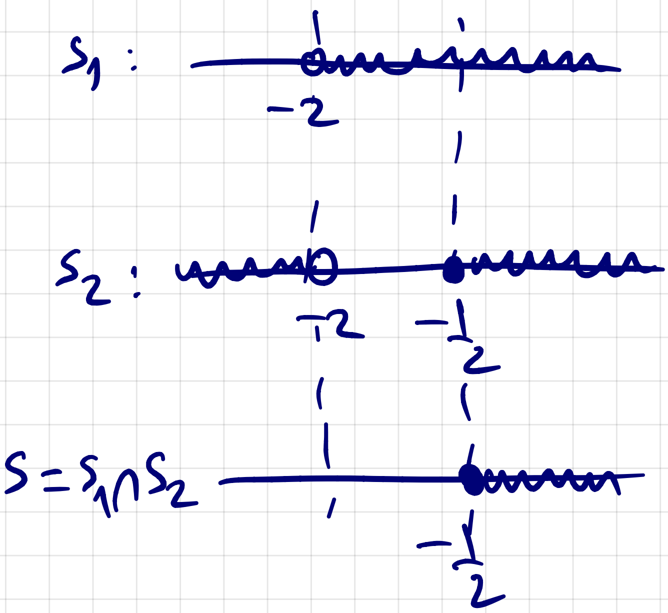
Efetuando a divisão de sinais, vamos encontrar:



$$S_2 = (-\infty, -2) \cup \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

A solução final será:

$$S = S_1 \cap S_2$$



$$S = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

(c) $\left|\dfrac{x}{2x-3}\right| \geq \dfrac{1}{2} \iff$

$\dfrac{x}{2x-3} \geq \dfrac{1}{2}$ ou $\dfrac{x}{2x-3} \leq -\dfrac{1}{2}$

S_1 S_2

$$S = S_1 \cup S_2$$

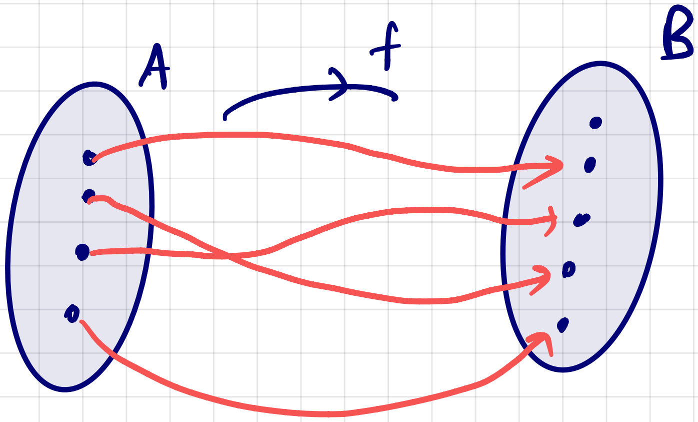
(exercício)

FUNÇÕES:

Def.: Sejam A e B dois conjuntos não vazios em $\mathbb{R}$. Chama FUNÇÃO $f: A \to B$ toda regra à qual leva todos os valores de A para valores de B, de maneira única.

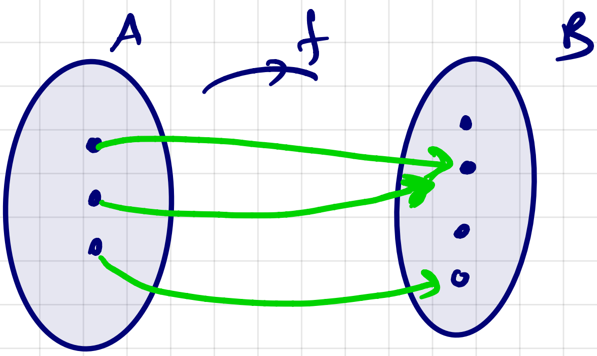
Em diagramas com setas, temos os seguintes exemplos e contra-exemplos:

01)



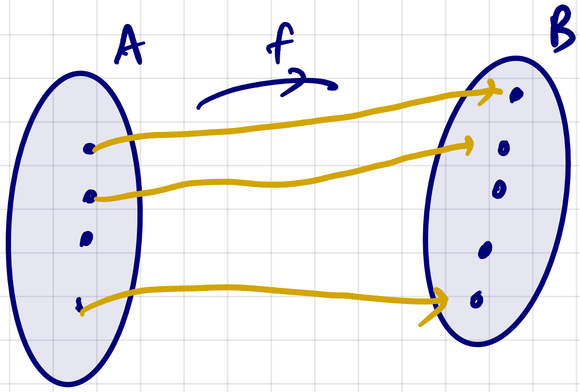
$f: A \to B$ é função.

02)



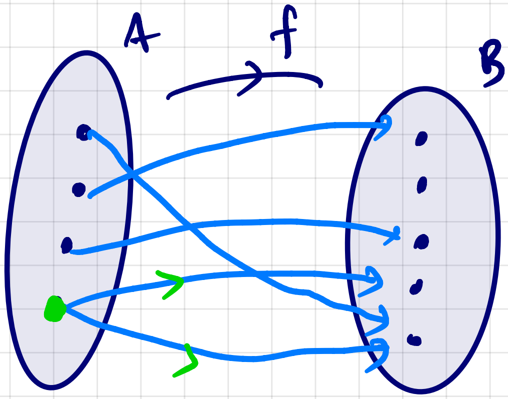
$f: A \to B$ é função.

03)



$f: A \to B$ não é função pois $\exists x \in A$ que não é enviado a nenhum $y \in B$

04)



$f: A \to B$ não é função pois, embora todos os elementos de A iam para elementos de B, um deles não vai de maneira única.

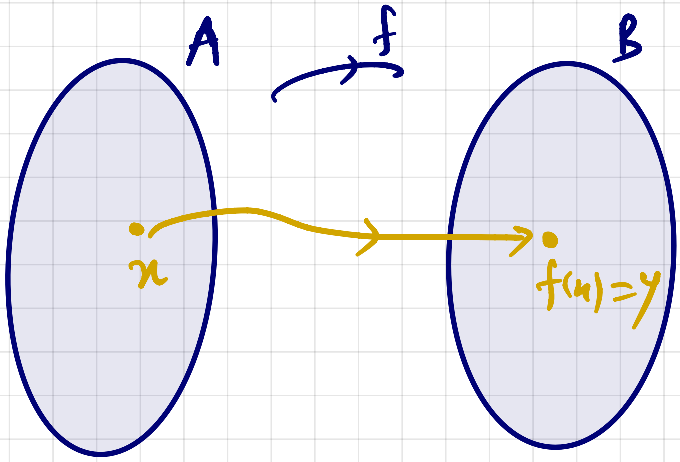
Dada uma função $f: A \to B$, dizemos que o conj. A chama-se DOMÍNIO da função, e denotamos por $A = D(f) = Dom(f)$,

O conjunto B chama-se CONTRADOMÍNIO de f, e denotamos por $CD(f)$.

O conjunto dos elementos de B que recebem valores de A mediante f chama-se imagem de f, e denotamos por $Im(f)$.

Dada $f: A \to B$ uma função, então, escrevemos:

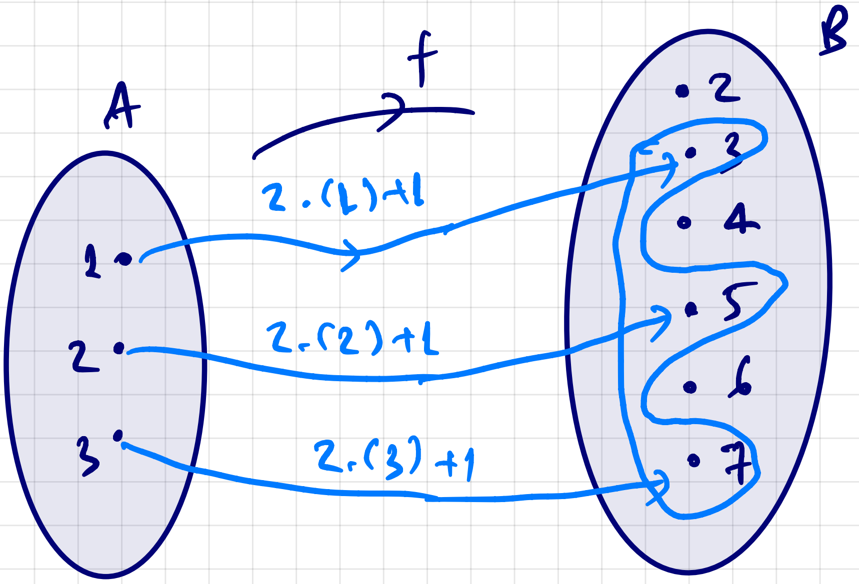
$$
\begin{aligned}
f: A &\to B \\
x &\mapsto f(x) := y
\end{aligned}
$$



Obs.: Não confunda os símbolos f e $f(x)$, pois f é a regra que define a função, enquanto que $f(x)$ é a imagem do elemento $x \in A$ mediante a aplicação f.

Ex.: $f: \underbrace{\{1, 2, 3\}}_{A} \longrightarrow \underbrace{\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}}_{B}$

$$f(x) = 2x + 1$$



$D(f) = A$; $CD(f) = B$

$Im(f) = \{3, 5, 7\}$.

Def.: Dizemos que duas funções $f, g: A \to B$ são iguais se, e somente se, $f(x) = g(x), \forall x \in A$.

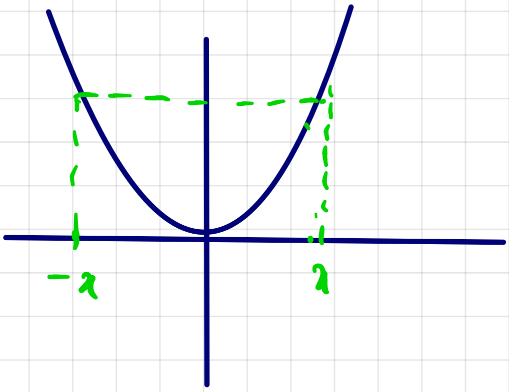
Ex.: $f: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$; $f(x) = x^2$

$g: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$; $g(x) = x.|x|$

Note que, $\forall x \in [0,+\infty)$; temos que

$$g(x) = x.\underbrace{|x|}_{=\,x,\text{ pois } x \geq 0} = x.x = x^2 = f(x)$$

Def.: Dizemos que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função par se, e somente se, $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = f(-x)$



desenho fica simétrico em relação ao eixo vertical.

Def.: Dizemos que uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar se, e somente se, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(-x)$.