Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos 3900, 3910, 6100 e 6400
Disciplina de Cálculo 1
Leitura e estudo complementar

A crise dos racionais

Prof. Dr. Maurício Zahn. UFPel/IFM/DME

Da Análise Real sabemos que o conjunto $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{N}\}$, equipado com a adição usual em $\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ (\frac{p}{q}, \frac{m}{n}) &\mapsto \frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn + mq}{qn}, \end{aligned}$$

e o produto

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ (\frac{p}{q}, \frac{m}{n}) &\mapsto \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{pm}{qn}, \end{aligned}$$

é um *corpo*, pois cumpre as propriedades:

Associatividades aditiva (A1) e multiplicativa (M1): $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$,

$$\text{A1:} \quad (x + y) + z = x + (y + z),$$

$$\text{M1:} \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

Comutatividades aditiva (A2) e multiplicativa (M2): $\forall x, y \in \mathbb{Q}$,

$$\text{A2:} \quad x + y = y + x,$$

$$\text{M2:} \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

Elementos Neutros aditivo e multiplicativo:

$$\text{A3:} \quad \exists\, 0 \in \mathbb{Q} \quad \text{tal que} \quad x + 0 = x, \forall x \in \mathbb{Q}.$$

O elemento 0 chama-se *zero*.

$$\text{M3:} \quad \exists\, 1 \in \mathbb{Q} \text{ tal que } 1 \neq 0 \text{ e } x \cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{K}.$$

O elemento 1 chama-se *um*.

Simétrico:

$$\text{A4:} \quad \forall x \in \mathbb{Q}\,, \exists -x \in \mathbb{Q} \text{ tal que } x + (-x) = 0.$$

Inverso Multiplicativo:

$$\text{M4:} \quad \forall x \neq 0\ , x \in \mathbb{Q}\,, \exists x^{-1} \in \mathbb{Q} \text{ tal que } x \cdot x^{-1} = 1.$$

Distributividade: $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$ tem-se

$$\text{D1:} \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

$$\text{D2:} \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Além disso, $\mathbb{Q}$ é *ordenado* pois existe um subconjunto chamado o conjunto dos positivos de $\mathbb{Q}$ [podemos chamá-lo de $\mathbb{Q}^+$] tal que, para quaisquer dois elementos positivos de $\mathbb{Q}$ [ou seja, em $\mathbb{Q}^+$] a soma de positivos resulta em um número racional positivo e o produto de dois positivos também resulta em um positivo, e dado um elemento $x \in \mathbb{Q}$, temos que ou x é positivo, ou então $-x$ é positivo, ou então $x = 0$.

Resumindo, $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado. Mas, então qual é o drama desse corpo? Por quê ele quer "conhecer suas raízes", como diz na tira acima, no divã do "Dr. Sigma"? Mais adiante vamos chegar à resposta para este "drama", mas para isso, precisamos apresentar outros conceitos da Análise Real.

Primeiramente, temos que um conjunto X em um corpo ordenado $\mathbb{K}$ é dito ser *limitado superiormente* se existir uma cota superior, ou seja, se existir um $M \in \mathbb{K}$ tal que $x \leq M$, para todo $x \in X$. Neste caso M é uma *cota superior* para o conjunto X. Analogamente se tem um conceito para um conjunto ser *limitado inferiormente*.

Isto posto, definimos:

Definição 1 Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $X \subset \mathbb{K}$ um conjunto limitado superiormente. Dizemos que $M \in \mathbb{K}$ é *supremo* para o conjunto X quando ele for a menor das cotas superiores. Mais precisamente, $M \in \mathbb{K}$ é supremo para X se satisfizer os axiomas:

1. $\forall x \in X$, temos $x \leq M$; (i.e., M é uma cota superior para X)
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in X$ tal que $M - \varepsilon < x_0 \leq M$. (i.e., M é a menor das cotas superiores para X).

Notação para o supremo: $M = \sup X$.

Definição 2 Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $X \subset \mathbb{K}$ um conjunto limitado inferiormente. Dizemos que $m \in \mathbb{K}$ é *ínfimo* para o conjunto X quando ele for a maior das cotas inferiores. Mais precisamente, $m \in \mathbb{K}$ é ínfimo para X se satisfizer os axiomas:

1. $\forall x \in X$, temos $x \geq m$; (i.e., m é uma cota inferior para X)
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in X$ tal que $m \leq x_0 < m + \varepsilon$. (i.e., m é a maior das cotas inferiores para X).

Notação para o ínfimo: $m = \inf X$.

Esses conceitos de ínfimo e supremo surgem para tentar sanar questões como: sendo, por exemplo o intervalo $(0, 1]$ no corpo dos racionais [veja bem, é o intervalo **limitado** contendo **somente** números racionais], temos que esse conjunto possui um elemento máximo, que é 1; porém, não possui um elemento mínimo, mas um ínfimo, que no caso é zero. Há detalhes mais profundos a serem tratados aqui, mas já estamos nos alongando bastante nessa explicação. Quando fizerdes Análise Real, tudo deverá ser detalhado. Ou seja, vamos deixar um pouco de mistério aqui neste exemplo, mas acreditamos ser bastante "aceitável", caso estejas vendo isso pela primeira vez...

Bom, após toda essa explicação, o corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais poderia se sentir um pouco melhor, mas infelizmente, ainda há uma problemática maior do que comentamos acima: o corpo dos racionais é insuficiente, no sentido de que, existem conjuntos em $\mathbb{Q}$ que, embora sejam limitados superiormente (inferiormente), não possuem supremo (ínfimo)! Isso realmente é assustador e é o motivo pelo qual $\mathbb{Q}$ está tão abalado no divã!

Isto justamente acontece porque existem números racionais que não possuem raízes quadradas nos racionais. Um exemplo disso é $\sqrt{2}$, que não é racional. Temos assim, um "buraco" na reta racional [na verdade haverá uma quantidade infinita e não enumerável, ou seja, há mais buracos do que pontos na "reta dos racionais", mas isto fica para uma outra consulta com o Dr. Sigma!]

De fato, não é difícil mostrar que $\sqrt{2}$ não é racional, e isso é feito na Afirmação a seguir:

Afirmação: Não existe número racional tal que seu quadrado seja 2. (em outras palavras: $\sqrt{2}$ não é racional).
Provemos esta afirmação. Por absurdo, suponhamos que $\sqrt{2}$ seja racional. Assim, $\exists p \in \mathbb{Z}, \exists\, q \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \tag{1}$$

com mdc(p, q)=1 (isto para dizer que $\frac{p}{q}$ está na forma *irredutível*, ou seja, simplificada ao máximo, não havendo fatores primos em comum).
Elevando (1) ao quadrado, obtemos

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2.$$

Logo, concluímos que p^2 é par e, portanto, segue que p também é par(verifique!), ou seja, $p = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$. Com isso, obtemos

$$2 = \frac{(2m)^2}{q^2} \Rightarrow q^2 = 2m^2,$$

ou seja, q^2 também é par, donde segue que q é par, i.e., $q = 2n$, $n \in \mathbb{N}$.
Logo, obtemos

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2m}{2n},$$

mas isto é um absurdo, pois mdc(p, q)=1.
Logo, $\sqrt{2}$ não é racional.

$\square$

Apenas por curiosidade, por exemplo, o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x^2 > 2 \;\text{ e }\; x \geq 0\}$$

é limitado inferiormente [por exemplo, 0 é uma cota inferior para A], mas não existe ínfimo para A.

De fato, defina o conjunto auxiliar

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x^2 < 2\,,\, x > 0\}.$$

Note que $A \cap B = \emptyset$, i.e., tais conjuntos são disjuntos, por construção.

Como já mostramos na afirmação anterior, temos que não existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 2$. Logo, dado $r \in \mathbb{Q}^+$, segue que $r \in A$ ou $r \in B$.

Temos, pois, dois fatos a verificar:
Fato 1. se $x \in A$, então existe $y \in A$ tal que $y < x$.

Fato 2. se $x \in B$, então existe $y \in B$ tal que $x < y$.

Faremos a prova do Fato 1, visto que a prova do outro é análoga. Assim, como $x \in A$, escreva $x = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$. Então $\left(\frac{p}{q}\right)^2 > 2$, ou seja, $p^2 - 2q^2 > 0$.

Tome $y = \dfrac{p}{q} - \dfrac{1}{nq}$, $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$y = \frac{np - 1}{nq},$$

com $n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que para n suficientemente grande teremos $y \in A$. De fato,

$$y \in A \Leftrightarrow \left(\frac{np-1}{nq}\right)^2 > 2 \Leftrightarrow (p^2 - 2q^2)n^2 - 2pn + 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{p + q\sqrt{2}}{p^2 - 2q^2} > \frac{p}{p^2 - 2q^2}.$$

Ou seja, basta tomar $n > \frac{p}{p^2 - 2q^2}$ para que $y = \frac{np-1}{nq} \in A$.

Assim, $y \in A$ é tal que

$$y = \frac{np-1}{nq} = \frac{np}{nq} - \frac{1}{nq} < \frac{np}{nq} = \frac{p}{q} = x,$$

ou seja, $y < x$, e então vale o Fato 1.

Agora, suponha por absurdo que exista $x_0 = \inf A$.

Então, $x_0 \leq x$, $\forall x \in A$. Pelo Fato 1 segue que $x_0 \notin A$. Então $x_0 \in B$, e pelo Fato 2, existirá $z \in B$ tal que $z^2 < 2$ e então z é uma cota inferior para A, um absurdo, pois

$x_0 < z$, ou seja, temos uma cota inferior maior do que aquela já considerada como o ínfimo!

Portanto, não existe $\inf A$, embora A seja limitado inferiormente!

Percebemos, então, que no corpo dos racionais existem "buracos", ou seja, existem conjuntos que, mesmo sendo limitados inferiormente, não possuem ínfimo e, também, existem conjuntos que são limitados superiormente mas não possuem supremo!

O Dr. Sigma ainda comenta que $\mathbb{Q}$ não tem fechamento, embora pareça tão "racional" - no sentido de pensante.

A questão do fechamento, ou melhor, da completude, fornece o seguinte conceito:

Definição 3 Dizemos que um corpo ordenado $\mathbb{K}$ é *completo* quando todo subconjunto não vazio X, limitado superiormente possuir um supremo (ou, equivalentemente, quando todo subconjunto não vazio X limitado inferiormente possuir ínfimo).

E disso segue um importante axioma fundamental da Análise Real:

Axioma: Existe um corpo ordenado e completo, chamado *corpo dos números reais*, denotado por $\mathbb{R}$.

Vamos exercitar um pouco:

Exercícios

1. Prove que não existe nenhum número racional tal que seu quadrado seja igual a 3 (ou seja, que $\sqrt{3}$ não é racional).

2. Responda formalmente cada item a seguir.

   (a) Prove que $\sqrt{2} - 1$ não é racional.

   (b) Justifique que $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

   (c) Mostre que o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 3 - 2\sqrt{2},\, x > 0\}$ é limitado inferiormente, mas não possui ínfimo em $\mathbb{Q}$.

3. Considere o conjunto $X = \{1 - \frac{1}{3n^2} : n \in \mathbb{N}\}$. Mostre que $\sup X = 1$.