CÁLCULO I

29/04/24 – AULA 07

TEOREMA: (PROPRIEDADES ARITMÉTICAS DOS LIMITES) Sejam $f, g: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do conj. A. Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então:

- (i) $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = L + M \left(= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \right)$

(ii) $\lim_{x \to a} f(x) - g(x) = L - M$

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$.

(iv) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, desde que $M \neq 0$.

(v) $\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = L^M$.

DEMONSTR. A prova de todos é apresentada em um curso de Análise Real. Por isso, faremos apenas a prova do item (i).

(i) $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = L + M$.

Dado $\varepsilon > 0$.

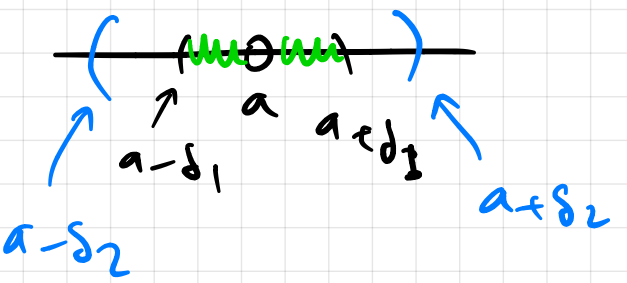
Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, segue que $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que,

$$\forall x \in A : 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

Do mesmo modo, como $\lim_{x \to a} g(x) = M$,

segue que $\exists\ \delta_2 > 0$, tal que:

$$\forall x \in A : 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (**)$$



Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$

Assim, $\forall x \in A$ tal que $0 < |x-a| < \delta$, segue que valem $(*)$ e $(**)$ simultaneamente. Assim, temos:

$$|f(x) + g(x) - (L+M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq$$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

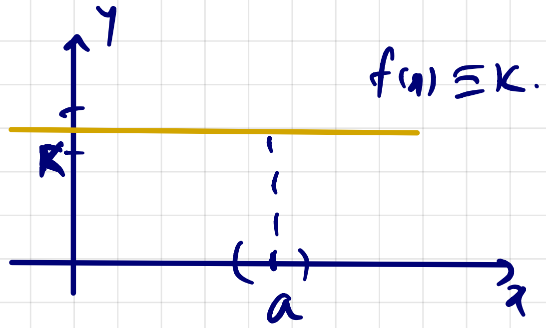
$$\leq \underbrace{|f(x) - L|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|g(x) - M|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ou seja, em "~~" temos a definição de

$$\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = L + M.$$

$\square$

PROPOSIÇÃO: O limite de uma constante é a própria constante.



DEMONSTR.: Seja $f(x) = K$, $\forall x$.

Vamos mostrar que

$$\lim_{x \to a} K = K \quad , \quad a \in \mathbb{R} \text{ ponto de acumulação de } \mathbb{R} \quad (A = \mathbb{R})$$

Dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon$; pois:

$\forall x \in \mathbb{R}: \quad 0 < |x - a| < \delta \implies$

$$|f(x) - K| = |K - K| = 0 < \varepsilon := \delta.$$

$\square$

EX.: $f(x) = 2$; $\forall x$:
$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} 2 = 2.$$

PROP.: $\lim_{x \to a} x = a.$

De fato, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon$; pois,

$\forall x \in \mathbb{R}: \quad 0 < |x - a| < \delta \implies$

$$\implies |f(x) - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon = \delta$$

$\square$

PROP.: $\lim_{x \to a} K \cdot x = K a. \quad (K \neq 0)$

De fato, dado $\varepsilon > 0$. Precisamos achar $\delta > 0$ tal que, $\forall x: \; 0 < |x - a| < \delta \implies |Kx - Ka| < \varepsilon$

Analisando $|kx - ka|$:

$$|k.x - k.a| = |k(x-a)| = |k|.\underbrace{|x-a|}_{<\delta} < |k|.\delta = \varepsilon$$

Então, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$.

Logo, $\lim_{x \to a} kx = k.a.$ $\square$.

EX.: $\lim_{x \to -1} 5x = 5.(-1) = -5$

COROLÁRIO: Se $P(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$ um polinômio, $a \in \mathbb{R}$ ponto de acumulação de $\mathbb{R}$, então

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

DEMONSTR.: De fato:

$$\lim_{x \to a} P(x) = \lim_{x \to a} \left(b_0 + b_1.x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n\right)$$

$$= \lim_{x \to a} b_0 + \lim_{x \to a} b_1.x + \lim_{x \to a} b_2x^2 + \dots + \lim_{x \to a} b_nx^n =$$

Limite da soma é a soma dos Limites

limite de constante, é a própria const.

$$= b_0 + b_1.a + \lim_{x \to a} b_2 . \lim_{x \to a} x^2 + \dots + \lim_{x \to a} b_n . \lim_{x \to a} x^n$$

$$= b_0 + b_1 \cdot a + b_2 \cdot \lim_{x\to a} x^{\overset{\lim 2}{x\to a}} \ldots + b_n \cdot \lim_{x\to a} x^{\overset{\lim n}{x\to a}}$$

usando (i, ii) e (n)

$$= b_0 + b_1 \cdot a + b_2 \cdot a^2 + \ldots + b_n \cdot a^n = P(a)$$

$\square$

INDETERMINAÇÕES:

Dado $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$; o que fazer para calcular

$\lim_{x\to 1} f(x)$?

Note que, a priori, temos

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(1)^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

A notação $\frac{0}{0}$ é um SÍMBOLO DE INDETERMINAÇÃO, e o mesmo deve ser removido perante uma simplificação.

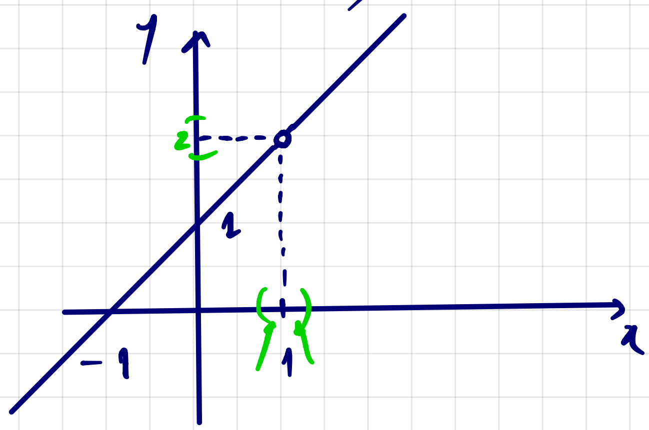
No exemplo acima, fazemos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 1+1 = 2$$

↳ ESTA SIMPLIFICAÇÃO REMOVE A INDETERMINAÇÃO.

De fato $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ é uma reta, com um furo em $x = 1$, pois

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = x+1 \;;\; x \neq 1.$$



Vejamos vários exemplos:

01) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$. (Repare que já provamos que este limite é 6 na primeira aula de limites)

Solução: $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(3)^2-9}{3-3} = \frac{9-9}{0} = \frac{0}{0}$ (INDET.)

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = \lim_{x\to 3} x+3 = 3+3 = 6$$

02) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-7x+10}{2x^2-3x-2} = \dfrac{0}{0}$ (INDET.)

↳ significa que há fatores $(x-2)$ no num. e no denominador

Precisamos dividir numerador e denominador por $x-2$.

$$
\begin{array}{rrr|l}
\cancel{x^2} & -7x & +10 & x-2 \\
\cancel{-x^2} & +2x & & \hline x-5 \\
\hline
 & -5x & +10 & \\
 & +5x & -10 & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}
$$

$\hookrightarrow x^2-7x+10 = (x-2)\cdot(x-5)$

$$
\begin{array}{rrr|l}
\cancel{2x^2} & -3x & -2 & x-2 \\
\cancel{-2x^2} & +4x & & \hline 2x+1 \\
\hline
 & x & -2 & \\
 & -x & +2 & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}
$$

$\hookrightarrow 2x^2-3x-2 = (x-2)(2x+1)$

Assim, obtemos:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-7x+10}{2x^2-3x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x-5)}{\cancel{(x-2)}(2x+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x-5}{2x+1} = \frac{2-5}{2\cdot(2)+1} = \frac{-3}{5}$$

03) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{3x^2-3x-6} = \dfrac{0}{0}$ (INDETERM.)

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^3} - 8 & x-2 \\ \hline -\cancel{x^3}+2x^2 & x^2+2x+4 \\ \hline \cancel{2x^2}-8 & \\ -\cancel{2x^2}+4x & \\ \hline 4x\cancel{-8} & \\ -4x+8 & \\ \hline 0 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l} \cancel{3x^2}-3x-6 & x-2 \\ \hline -\cancel{3x^2}+6x & 3x+3 \\ \hline 3x\cancel{-6} & \\ -3x+6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$3x^2-3x-6 = (x-2).(3x+3)$

$x^3-8 = (x-2).(x^2+2x+4)$

Assim, teremos:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{3x^2-3x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(3x+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+4}{3x+3} = \frac{(2)^2+2.(2)+4}{3.(2)+3} = \frac{12}{9}^{\div 3} = \frac{4}{3}$$

04) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2} = \dfrac{0}{0}$ (INDET).

Neste caso a indeterminação ocorre com um fator envolvendo radical. Precisamos racionalizar para podermos efetuar alguma simplificação.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2} \times \frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+3})^2-(2)^2}{(x^2-3x+2)\cdot(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x+3-4}{(x^2-3x+2)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x^2-3x+2)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^2}-3x+2 & x-1 \\ \hline -\cancel{x^2}+x & x-2 \\ \hline -2x+\cancel{2} & \\ +2\cancel{x}-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x-2)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-2)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \frac{1}{(1-2)(\sqrt{1+3}+2)} = \frac{1}{-1.(2+2)} = -\frac{1}{4}$$

05) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{2-3x} - \sqrt{5}}{x^2 - 1}$

Exercício.

06) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{3x-1}}{x^2 + x - 2}$