CÁLCULO I

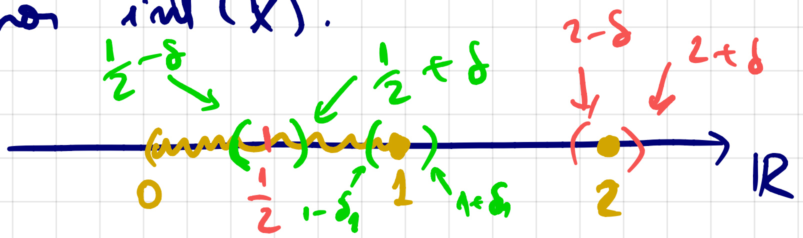
24/04/24 – AULA 05

NOÇÕES SOBRE TOPOLOGIA:

Def.: Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto e $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que a é ponto interior do conjunto X se $\exists\, \delta > 0$ tal que $(a-\delta, a+\delta) \subset X$.

O conjunto de todos os pontos interiores de um conjunto X chama-se INTERIOR de X, e é denotado por $\text{int}(X)$.

Ex.:



$X = (0, 1] \cup \{2\}$.

$\frac{1}{2} \in \text{int}(X)$ pois $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$\left(\tfrac{1}{2} - \delta, \tfrac{1}{2} + \delta\right) \subset X.$$

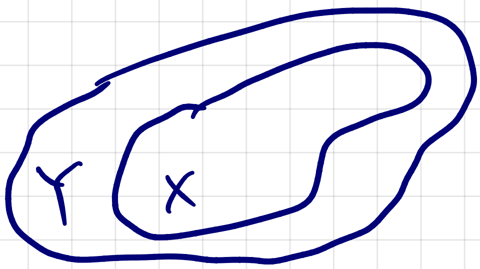
Por exemplo, tome $\delta = \frac{1}{4} > 0$.

$1 \notin \text{int}(X)$ pois $\forall\, \delta > 0$, $(1-\delta, 1+\delta) \not\subset X$.

$2 \notin \text{int}(X)$ pois $\forall\, \delta > 0$, $(2-\delta, 2+\delta) \not\subset X$.

PROPOSIÇÃO: Sejam X, Y conjuntos em $\mathbb{R}$. Então,

$$X \subset Y \implies \text{int}(X) \subset \text{int}(Y).$$



DEMONSTRAÇÃO: Suponha $X \subset Y$. Dado $a \in \text{int}(X)$, precisamos mostrar que $a \in \text{int}(Y)$

Como $a \in \text{int}(X)$, então $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$(a-\delta, a+\delta) \subset X \underset{\uparrow}{\subset} Y \Rightarrow (a-\delta, a+\delta) \subset Y,$$

POR HIPÓTESE

logo, $a \in \text{int}(Y)$

Pela arbitrariedade da escolha do ponto $a \in X$, segue que $\text{int}\, X \subset \text{int}\, Y$.

$\square$

PROPOSIÇÃO: Dado $X \subset \mathbb{R}$, então, $\text{int}\, X \subset X$.

DEMONSTR.: De fato, dado $a \in \text{int}(X)$, então, $\exists\, \delta > 0$ tal que $(a-\delta, a+\delta) \subset X$. Em particular, $a \in X$. Pela arbitrariedade da escolha do ponto a segue que $\text{int}\, X \subset X$.

Def.: Dizemos que um conj. $X \subset \mathbb{R}$ é um aberto de $\mathbb{R}$ se, e somente se, todos os seus pontos forem interiores. Ou seja, $X \subset \mathbb{R}$ é um aberto se, e só se, $\text{int}\, X = X$.

Como, c.f. a proposição anterior tem-se que sempre vale que $\text{int}\, X \subset X$, então podemos enfraquecer a def. acima dizendo que

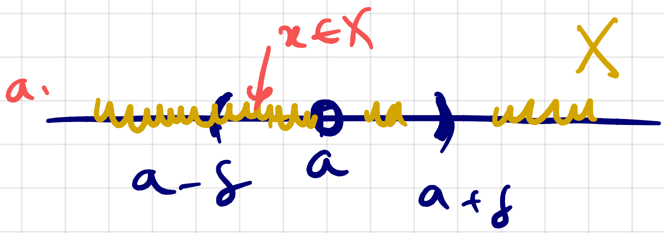
$X \subset \mathbb{R}$ é um aberto de $\mathbb{R}$ $\overset{def.}{\iff}$ $X \subset \operatorname{int} X$.

Def.: Dizemos que um ponto $a \in \mathbb{R}$ é um PONTO DE ACUMULAÇÃO de um conj. $X \subset \mathbb{R}$ se, e só se, $\forall \delta > 0$ tem-se $\big((a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}\big) \cap X \neq \emptyset$.

Em outras palavras, $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de $X \subset \mathbb{R}$ se $\forall \delta > 0$, $\exists x \in X$ tal que

$0 < |x-a| < \delta$.

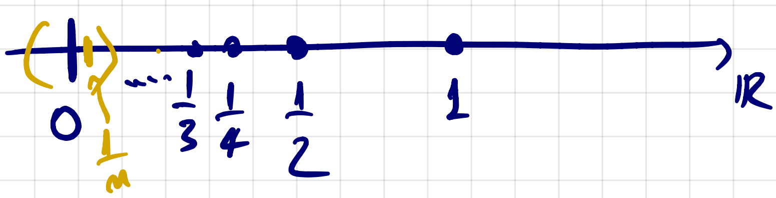
pois devemos ter $x \neq a$



Ex.: $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$

$\frac{1}{n} > 0, \forall n$.

$0 \notin X$



Porém, $0 \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação do conj. X, pois, $\forall \delta > 0$, por exemplo $\delta = 0{,}02 > 0$ teremos um $x \in X$ tal que

$$0 < |x - 0| < 0{,}02$$

$\frac{2}{100} = \frac{1}{50}$

POR EXEMPLO, $x = \frac{1}{51} \in X$

Obviamente existem muitos outros conceitos e resultados da Topologia (da reta), que serão estudados em ANÁLISE REAL.

LIMITES DE FUNÇÕES:

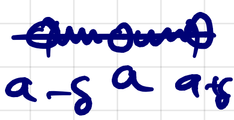
Def.: Sejam $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do conj. A. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o LIMITE DA $f(x)$ QUANDO x TENDE PARA a, e escrevemos $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ se, e somente se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, } \forall x \in A: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Obs.: Note que:

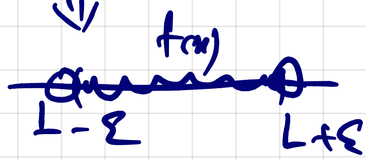
- $0 < |x-a| < \delta \iff x \neq a$ e $|x-a| < \delta \iff$

  $\iff x \neq a$ e $-\delta < x - a < \delta \underset{+a}{\iff}$

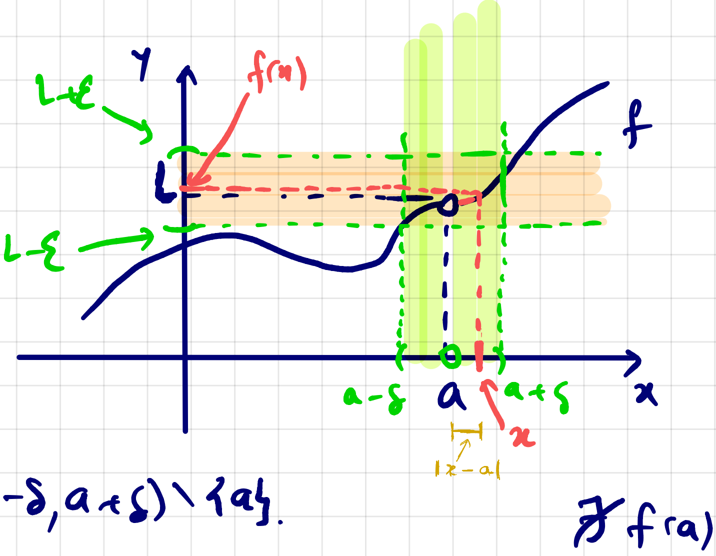
  $\iff x \neq a$ e $a - \delta < x < a + \delta \iff$ 

- $|f(x) - L| < \varepsilon \iff -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \iff L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

  $\Updownarrow$



INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO CONCEITO DE LIMITE:



Escolha $\varepsilon>0$ qualquer.
constrói o intervalo
$(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

$\exists\, \delta>0$ tal que se
constrói: $(a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$.

Tome qualquer $x \in (a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$.
ou seja, $\forall x: 0<|x-a|<\delta$

Então, teremos $|f(x)-L|<\varepsilon$, i.e., $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

Obs: Note que, pela def. de limite, $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ tal que... nos diz que o δ depende da escolha do $\varepsilon>0$.

Vejamos alguns exemplos:

01) Prove que $\lim\limits_{x\to 1} 2x+3 = 5$

Solução: Dado $\varepsilon>0$, precisamos encontrar $\delta>0$ tal que, $\forall x \in \mathbb{R}: 0<|x-1|<\delta$, implique em $|f(x)-5|<\varepsilon$.

Avaliando $|f(x)-5|$, teremos:

$$|f(x)-5| = |2x+3-5| = |2x-2| = |2.(x-1)| =$$

$$= 2.\underbrace{|x-1|}_{<\delta} < 2\delta := \varepsilon$$

Ou seja, basta tomar $2\delta=\varepsilon$, i.e., $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Portanto, $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$.

$\square$

<u>Exemplificando</u> $\varepsilon = 0{,}1 > 0$. Então, $\delta = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05$

Ou seja, para $\varepsilon = 0{,}1 > 0$, temos que,

qualquer $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < |x-1| < 0{,}05 = \delta,$$

é <u>GARANTIDO</u> que $|f(x) - 5| < \varepsilon = 0{,}1$.

De fato, por exemplo, $x = 0{,}998$. Então:

$$0 < |x-1| = |0{,}998 - 1| = 0{,}002 < 0{,}05 = \delta$$

Então, $|f(x) - 5| = |2.(0{,}998) + 3 - 5| =$

$$= 0{,}004 < 0{,}1 = \varepsilon.$$

---

02) Prove que $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

<u>Obs.:</u> NOTE QUE, SUBSTITUINDO, VAMOS ENCONTRAR $\frac{0}{0}$, QUE É UM SÍMBOLO DE INDETERMINAÇÃO.

<u>Solução:</u> Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in D(f)$, tal que $0 < |x - 3| < \delta$, implique em $|f(x) - 6| < \varepsilon$. Note que $\nexists\ f(3)$.

Analisando $|f(x) - 6|$:

$$|f(x)-6| = \left|\frac{x^2-9}{x-3} - \frac{6}{1}\right| = \left|\frac{x^2-9-6(x-3)}{x-3}\right| =$$

$$= \left|\frac{x^2-9-6x+18}{x-3}\right| = \left|\frac{x^2-6x+9}{x-3}\right| = \left|\frac{(x-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-3}}\right|$$

$$= \underbrace{|x-3|}_{<\delta} < \delta := \varepsilon$$

Ou seja, basta tomar $\delta = \varepsilon$.

$\square$

---

03) Prove que $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$

Solução: Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$ tal que, $\forall x : 0 < \underbrace{|x-4| < \delta}$, implique em $|f(x) - 2| < \varepsilon$.

Avaliando $|f(x) - 2|$:

$$|f(x)-2| = |\sqrt{x} - 2| = \left|(\sqrt{x}-2) \cdot \frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)}\right| =$$

$$= \left|\frac{(\sqrt{x})^2 - (2)^2}{\sqrt{x}+2}\right| = \left|\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}\right| = \frac{\overbrace{|x-4|}^{<\delta}}{|\sqrt{x}+2|} < \frac{\delta}{|\sqrt{x}+2|}$$

temos que "eliminar" o x.

pois $\delta = \delta(\varepsilon)$

Note que:

$$|\sqrt{x}+2| \geq \sqrt{x}+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{|\sqrt{x}+2|} < \frac{1}{2}$$

TOMANDO OS INVERSOS

Assim, obtemos:

$$|f(x)-2| < \frac{\delta}{|\sqrt{x}+2|} = \delta \cdot \frac{1}{|\sqrt{x}+2|} < \frac{\delta}{2} := \varepsilon.$$

$< \frac{1}{2}$

Ou seja, basta tomar $\boxed{\delta = 2\varepsilon.}$

$\square$

---

04) Prove que $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x}{x+3} = -\frac{1}{2}$ (exercício)