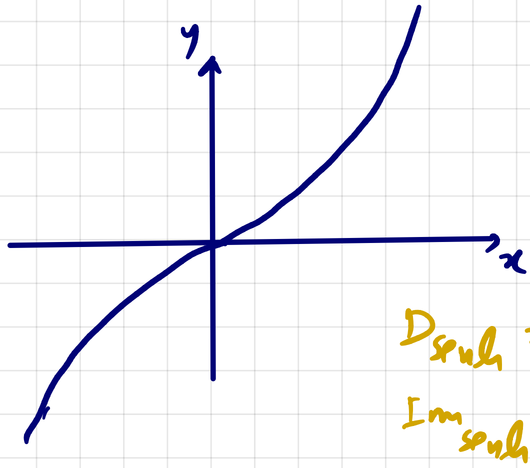
CÁLCULO F

19/04/24 – AULA 03

No final da aula passada iniciamos o estudo de funções hiperbólicas. Vimos as funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico.

$\text{senh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\text{senh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



$D_{\text{senh}} = \mathbb{R}$

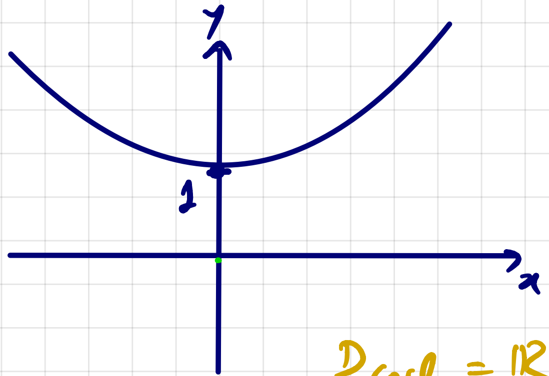
$Im_{\text{senh}} = \mathbb{R}$

Note que $\text{senh}\, 0 = 0$: de fato,

$$\text{senh}\, 0 = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{e^0 - e^0}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

$\cosh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



$D_{\cosh} = \mathbb{R}$

$Im_{\cosh} = [1, +\infty)$

$\Updownarrow$

$\cosh x \geq 1, \forall x.$

Note que:

$\cosh 0 = 1$: de fato:

$$\cosh 0 = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Vimos também que vale a relação hiperbólica fundamental:

$$\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1.$$

De fato: $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2x}+2.e^x.e^{-x}+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2.e^x.e^{-x}+e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{\cancel{e^{2x}} + 2.\overset{=1}{e^0} + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} + 2.\overset{=1}{e^0} - \cancel{e^{-2x}}}{4} = 1$$

Vejamos as demais funções hiperbólicas: elas são definidas de forma similar às trigonométricas:

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\underbrace{\cosh x}_{\neq 0}} = \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{\cancel{2}}}{\frac{e^x+e^{-x}}{\cancel{2}}} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

DISSO TEREMOS QUE $D(\tanh) = \mathbb{R}$.

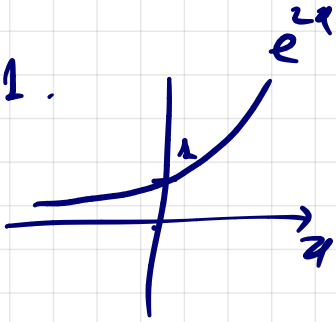
gráfico: observe que:

$$\tanh x = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{e^{2x}-1}{\cancel{e^x}}}{\frac{e^{2x}+1}{\cancel{e^x}}} =$$

$$= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^{2x}+1-1-1}{e^{2x}+1} = \frac{\cancel{e^{2x}+1}}{\cancel{e^{2x}+1}} - \frac{2}{e^{2x}+1}$$

$$= 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$$

Note que $\begin{cases} \text{se } x < 0; & 0 < e^{2x} < 1. \\ \text{se } x \geq 0; & e^{2x} \geq 1. \end{cases}$



Então:

$$\begin{cases} 1 < e^{2x}+1 < 2, & \text{se } x < 0 \\ e^{2x}+1 \geq 2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases};$$

Tomando os inversos (pois para mostrar $\tanh x = 1 - \dfrac{2}{e^{2x}+1}$, a expressão $e^{2x}+1$ está no denominador), vamos obter:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{e^{2x}+1} < 1, & \text{se } x < 0 \\ 0 < \dfrac{1}{e^{2x}+1} \leq \dfrac{1}{2}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Multiplicando por -2:

$$\begin{cases} -1 > -\dfrac{2}{e^{2x}+1} > -2, & \text{se } x < 0 \\ -1 \leq \dfrac{-2}{e^{2x}+1} < 0, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Somando 1, teremos:

$$\begin{cases} 0 > \underbrace{1 - \dfrac{2}{e^{2x}+1}}_{\tanh x} > -1 & , \text{ se } x < 0 \\[2ex] 0 \leq \overbrace{1 - \dfrac{2}{e^{2x}+1}} < 1 & , \text{ se } x \geq 0 \ ; \end{cases}$$

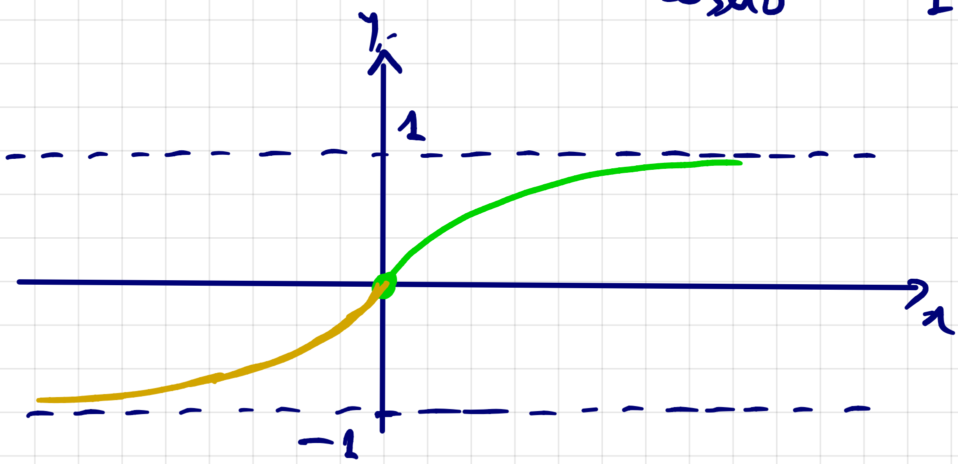
ou seja, obtemos:

$$\begin{cases} -1 < \tanh x < 0, & \text{se } x < 0 \\[1ex] 0 \leq \tanh x < 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Ou seja, temos:

$$-1 < \tanh x < 1 \ , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Além disso, $\tanh 0 = \dfrac{\operatorname{senh} 0}{\cosh 0} = \dfrac{0}{1} = 0$

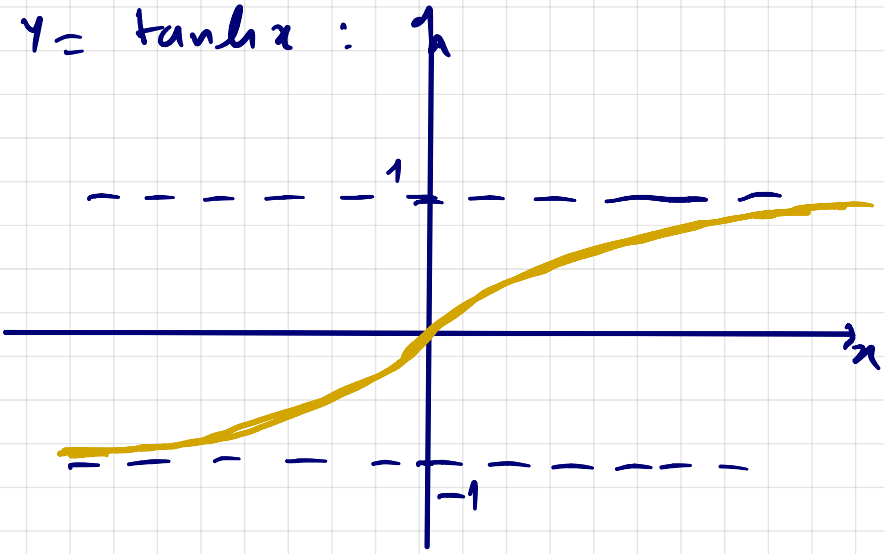


$$\tanh x = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$$

NESTA FRAÇÃO O DENOMINADOR AUMENTA EXPONENCIALMENTE, e então O QUOCIENTE VAI A ZERO QUANDO x VAI AO INFINITO

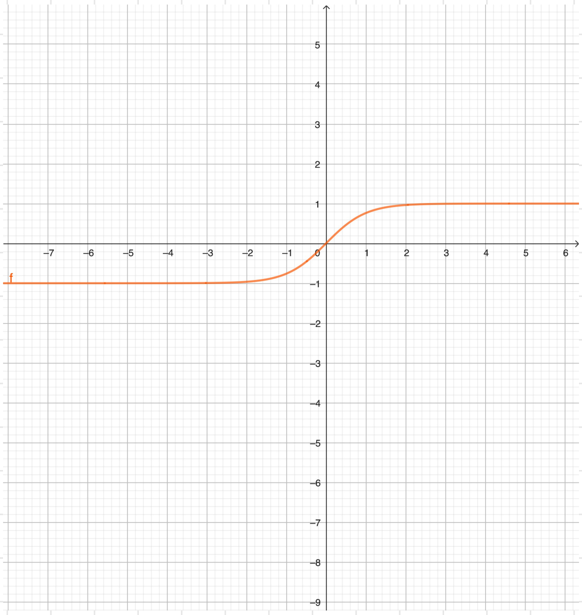
QUANDO x VAI A $-\infty$ A EXPRESSÃO $e^{2x}+1$ TENDE PARA 1; E ENTÃO $1 - \dfrac{2}{e^{2x}+1}$ TENDE A -1.

Ou seja, temos o seguinte gráfico para $y = \tanh x$:



$D(\tanh) = \mathbb{R}$

$Im(\tanh) = (-1, 1)$.



→ gráfico pelo GEOGEBRA.
CUIDADO $y = 1$ e $y = -1$ SÃO ASSÍNTOTAS. DEMOS ZOOM (em aula) e obtivemos o que tínhamos na teoria.

(os cálculos acima).

SECANTE HIPERBÓLICA: É definida por:

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

Note que, como $\cosh x \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$; e $D(\cosh) = \mathbb{R}$; então $D(\operatorname{sech}) = \mathbb{R}$

[pois $\cosh(x) \neq 0$.

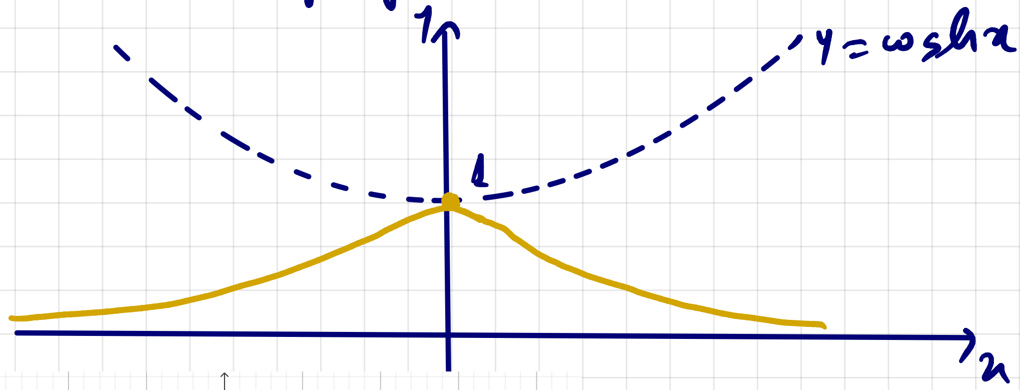
$\cosh x \geq 1$ e $\cosh x > 0$.

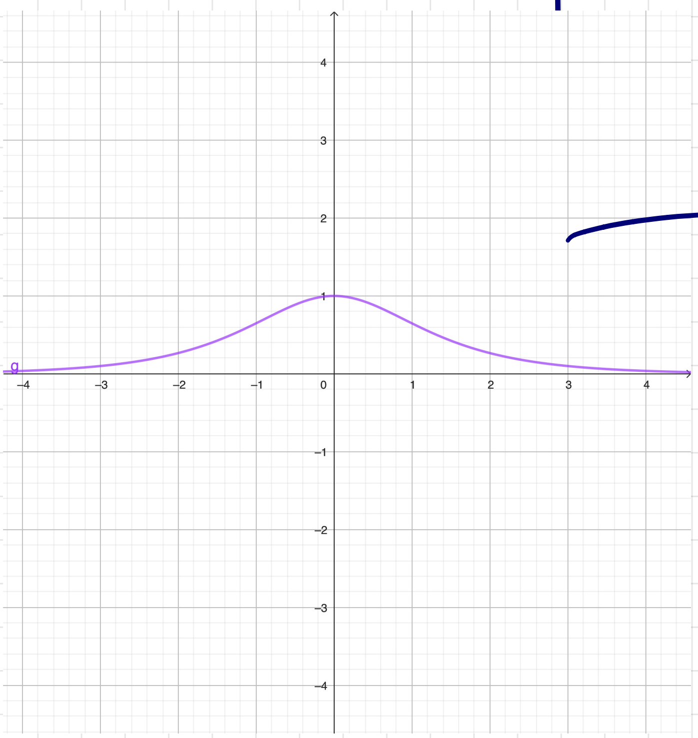
$$\Rightarrow \frac{1}{\cosh x} \leq 1 \; ; \quad \text{com } \frac{1}{\cosh x} > 0 \,, \text{ i.e.,}$$

$$\operatorname{sech} x \leq 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{sech} x > 0 \,.$$

Ou seja, $\operatorname{Im}(\operatorname{sech}) = (0, 1]$.

O gráfico da secante hiperbólica é o "inverso" do gráfico do cosseno hiperbólico.





pelo GEOGEBRA.

Da relação hiperbólica fundamental, teremos:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \,, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dividindo por $\cosh^2 x > 0$, teremos:

$$\frac{\cancel{\cosh^2 x}}{\cancel{\cosh^2 x}} - \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

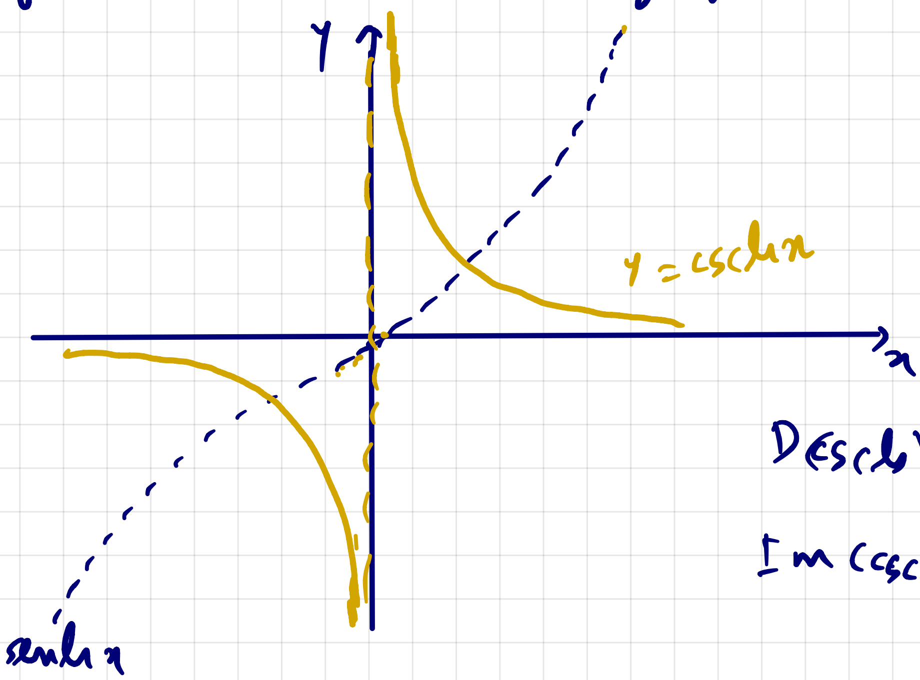
$$\boxed{1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x}$$

COSSECANTE HIPERBÓLICA: É definida por:

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

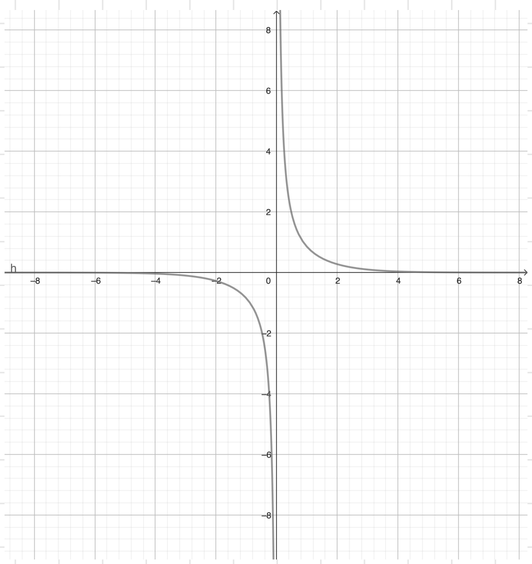
Como $\operatorname{senh} 0 = 0$; então $\nexists \operatorname{csch} 0$.

gráfico: é o inverso do gráfico do seno hiperbólico.



$D(\operatorname{csch}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$Im(\operatorname{csch}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



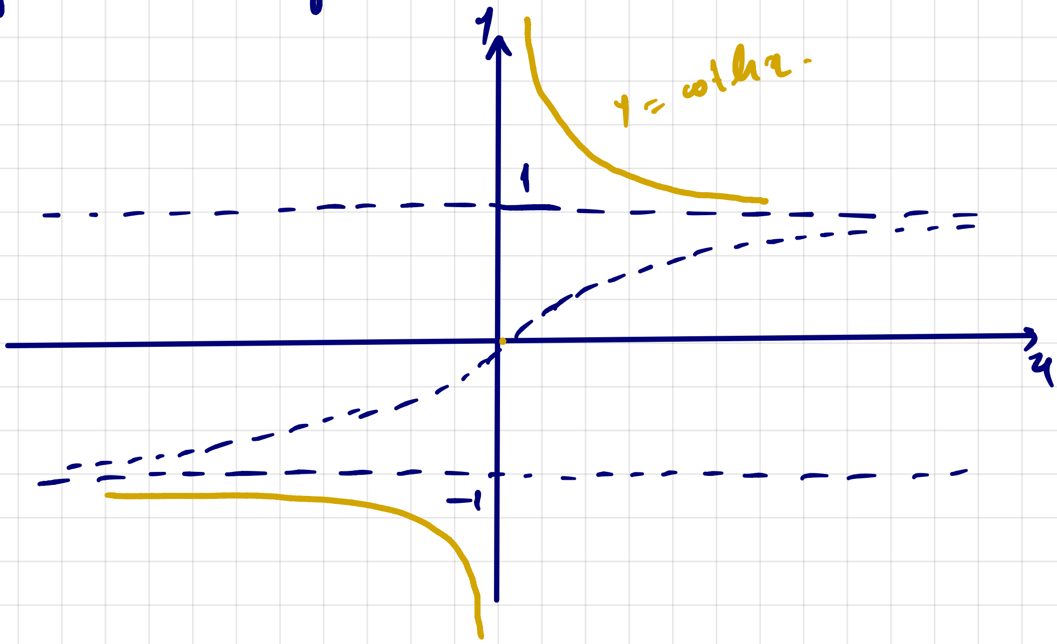
→ gráfico de $y = \operatorname{csch} x$ pelo geogebra.

COTANGENTE HIPERBÓLICA: é definida por

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}$$

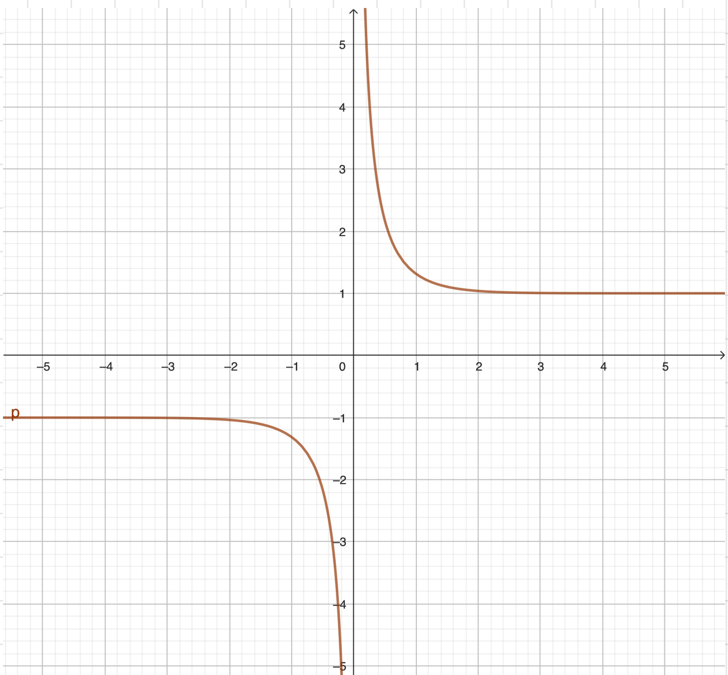
$$= \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

O seu esboço gráfico será o "inverso" do esboço gráfico da tangente hiperbólica.



$D(\coth) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$Im(\coth) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.



→ esboço gráfico de $y = \coth x$ pelo geogebra.

Outra relação derivada da relação hiperbólica fundamental é:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1. \quad , \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dividindo por $\operatorname{senh}^2 x$, $\forall x \neq 0$; teremos:

$$\frac{\cosh^2 x}{\operatorname{senh}^2 x} - \frac{\cancel{\operatorname{senh}^2 x}}{\cancel{\operatorname{senh}^2 x}} = \frac{1}{\operatorname{senh}^2 x}$$

$$\boxed{\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x. \quad , \forall x \neq 0.}$$

Outras fórmulas similares às trigonométricas:

$$\operatorname{senh}(a+b) = \operatorname{senh} a \cdot \cosh b + \operatorname{senh} b \cdot \cosh a.$$

De fato:

$$\operatorname{senh}(a+b) = \frac{e^{a+b} - e^{-(a+b)}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[e^a \cdot e^b - e^{-a} \cdot e^{-b} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[e^a \cdot e^b - e^a \cdot e^{-b} + e^a \cdot e^{-b} - e^{-a} \cdot e^{-b} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[e^a \cdot (e^b - e^{-b}) + e^{-b} (e^a - e^{-a}) \right] =$$

$$= e^a \cdot \underbrace{\frac{e^b - e^{-b}}{2}}_{\operatorname{senh} b} + e^{-b} \cdot \underbrace{\frac{e^a - e^{-a}}{2}}_{\operatorname{senh} a} =$$

$$= e^a \cdot \operatorname{senh} b + e^{-b} \cdot \operatorname{senh} a. \qquad (I)$$

Obs.: Um fato importante:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow 2.\operatorname{senh} x = e^x - \cancel{e^{-x}}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow 2\cdot\cosh x = e^x + \cancel{e^{-x}} \quad +$$

$$\boxed{\operatorname{senh} x + \cosh x = e^x} \quad (*)$$

Note que:

- $\underbrace{\operatorname{senh}(-x)} = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} =$

$$= -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \underbrace{-\operatorname{senh}(x)}$$

Ou seja, o seno hiperbólico é ímpar.

- $\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x,$

ou seja, o cosseno hiperbólico é par.

Então, de $(*)$, obtemos:

$$e^{-x} = \operatorname{senh}(-x) + \cosh(-x)$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{-x} = -\operatorname{senh} x + \cosh x.} \quad (**)$$

Levando $(*)$ e $(**)$ para (I), obtemos:

$$\operatorname{senh}(a+b) = e^{a}\operatorname{senh} b + e^{-b}\operatorname{senh} a.$$

$$= (\operatorname{senh} a + \cosh a)\cdot\operatorname{senh} b + (\operatorname{senh} b + \cosh b)\cdot\operatorname{senh} a.$$

$$= \cancel{\operatorname{senh} a\cdot\operatorname{senh} b} + \cosh a\cdot\operatorname{senh} b - \cancel{\operatorname{senh} b\cdot\operatorname{senh} a} +$$

$$+ \cosh b\cdot\operatorname{senh} a.$$

$$= \operatorname{senh} a\cdot\cosh b + \operatorname{senh} b\cdot\cosh a$$

$\square$