CÁLCULO 3 $\qquad\qquad$ $\boxed{26/04/24 – \text{AULA } 06}$

Para funções $\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ não temos como efetuar o esboço gráfico, salvo em casos muito específicos.

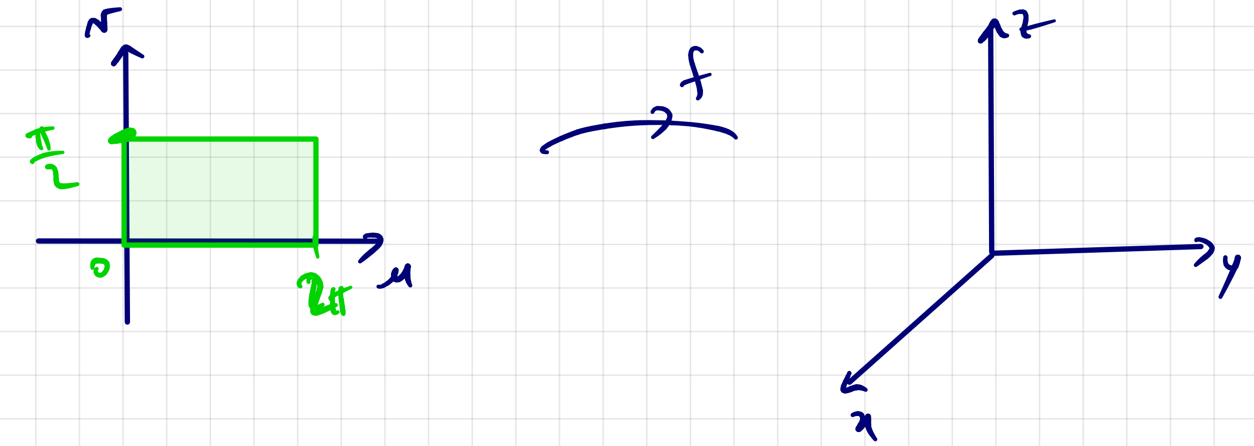
Ex.: LISTA 02 – 07 – b

7. Desenhe as superfícies definidas parametricamente pelas seguintes funções:

(a) $f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, onde $u, v \in \mathbb{R}$

(b) $f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \operatorname{sen} v \\ \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ \cos v \end{pmatrix}$, onde $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

$$(u,v) \mapsto f(u,v) = \Big(\overbrace{\cos u \operatorname{sen} v}^{x}, \overbrace{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}^{y}, \overbrace{\cos v}^{z}\Big) \subset \mathbb{R}^3$$



$$\begin{cases} x = \cos u \operatorname{sen} v \\ y = \operatorname{sen} u \cdot \operatorname{sen} v \\ z = \cos v \end{cases}$$

Note que:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 u \operatorname{sen}^2 v + \operatorname{sen}^2 u \cdot \operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v$$

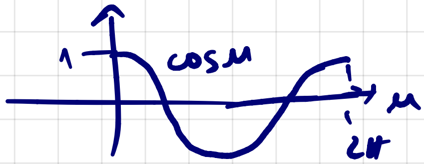
$$= \operatorname{sen}^2 v \cdot (\underbrace{\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u}_{=1}) + \cos^2 v$$

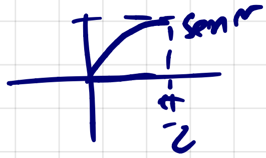
$$= \operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v = 1.$$

$x^2+y^2+z^2=1$. (eq. da esfera de raio unitário, centrada na origem)

$0 \leq u \leq 2\pi$; $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$:

• $x = \cos u \cdot \operatorname{sen} v$: o menor valor de x é quando $\cos u = -1$ e $\operatorname{sen} v = 1$





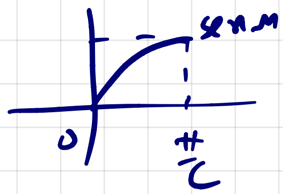
ou seja, quando $x = -1$

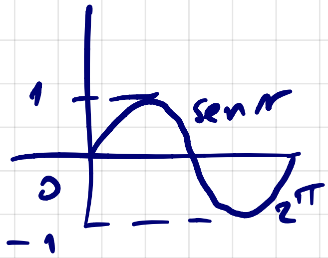
o maior valor para x será quando $\cos u = 1$
$\operatorname{sen} v = 1$

$x = \cos u \cdot \operatorname{sen} v$

$x = 1 \cdot 1 = 1$.

$y = \operatorname{sen} u \cdot \operatorname{sen} v$.





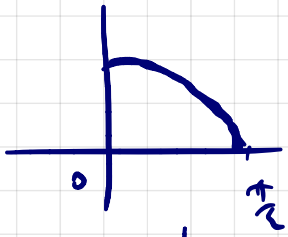
o menor valor para y será quando $\operatorname{sen} u = 1$
$\operatorname{sen} v = -1$, i.e.,

$y = (1) \cdot (-1) = -1$.

o maior valor para y será quando $\operatorname{sen} u = 1$
$\cos u = 1$:

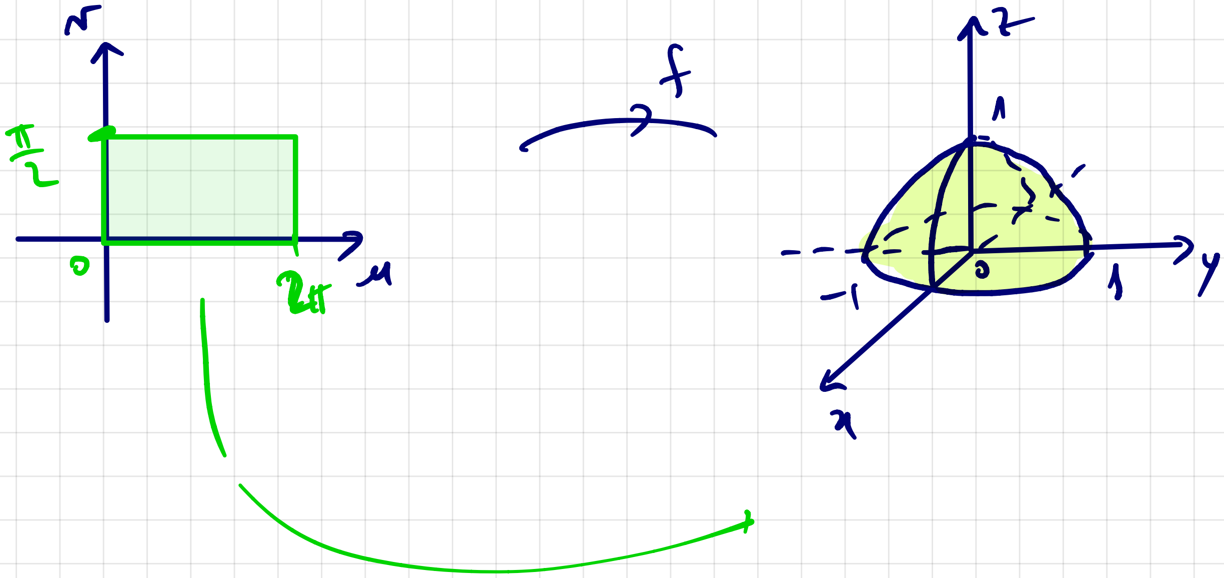
$y = (1) \cdot (1) = 1$.

• $z = \cos v$



- o maior valor para z será quando $\cos v = 1$; ou seja, $z = 1$.

- o menor valor para z será quando $\cos v = 0$; ou seja, $z = 0$.



$x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $0 \le z \le 1$

LIMITES DE FUNÇÕES $\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$.

Def.: Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função, com $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação do conj. Ω (e isto é abreviado, usando-se a notação $a \in \Omega'$)

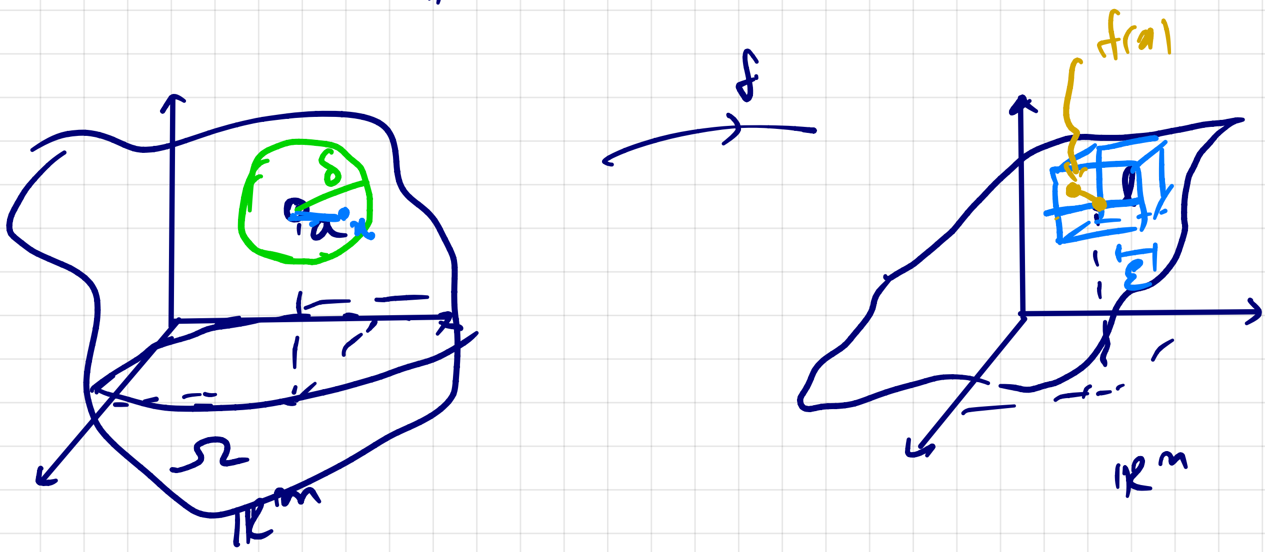
Dizemos que $l \in \mathbb{R}^n$ é o limite da $f(x)$ quando x tende para a, e escrevemos

$$l = \lim_{x \to a} f(x) ,$$

se, e somente se,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: tal que ; $\forall x \in \Omega : 0 < d_{\mathbb{R}^m}(x, a) < \delta \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \quad d_{\mathbb{R}^n}(f(x), \ell) < \varepsilon$.



ALGUNS CASOS DE EXEMPLOS:

01) $f : \Omega \subset (\mathbb{R}^2, d_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, d_2)$

$a \in \Omega'$.

$a = (a_1, a_2)$.

$x = (x_1, x_2)$

$f(x) = (\underline{f_1(x_1, x_2)}, \underline{f_2(x_1, x_2)}, \underline{f_3(x_1, x_2)})$

FUNÇÕES COORDENADAS DA FUNÇÃO f.

Neste caso,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell := (\ell_1, \ell_2, \ell_3) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tal que, $\forall x \in \Omega$:

$$0 < d_1(x, a) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), \ell) < \varepsilon .$$

Ou seja:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que, $\forall x \in \Omega$:

$$0 < |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < \delta \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sqrt{(f_1(x_1, x_2) - \ell_1)^2 + (f_2(x_1, x_2) - \ell_2)^2 + (f_3(x_1, x_2) - \ell_3)^2} < \varepsilon.$$

02) $f: \Omega \subset (\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ $\qquad f = f(x, y)$

$a = (a_1, a_2) \in \Omega'$. Então:

$$\lim_{(x,y) \to (a_1, a_2)} f(x, y) = \ell \in \mathbb{R} \overset{def.}{\Longleftrightarrow}$$

$X = (x, y)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que, $\forall X \in \Omega$:

$$0 < d_2(X, a) < \delta \Rightarrow |f(X) - \ell| < \varepsilon.$$

Ou seja:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que, $\forall (x, y) \in \Omega$:

$$0 < \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - \ell| < \varepsilon.$$

EXEMPLOS:

01) Prove que $\lim_{(x,y)\to(1,-2)} (2x+3y) = -4$.

SOLUÇÃO: Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$, tal que, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $0 < d((x,y),(1,-2)) < \delta$, implique em $|f(x,y) - (-4)| < \varepsilon$.

Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, achar $\delta > 0$ tal que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} < \delta \overset{(*)}{\Rightarrow} |f(x,y) + 4| < \varepsilon.$$

Analisando $|f(x,y)+4|$; teremos:

$$|f(x,y)+4| = |2x+3y+4| = |2x-2+2+3y+4| =$$

PRECISAMOS "VER" DE ALGUM MODO, $x-1$ E $y+2$ NESTA SOMA (com o intuito de obter relação entre δ e ε)

desigualdade triangular do módulo

$$= |2(x-1) + 3y+6| = |2(x-1) + 3\cdot(y+2)| \leq$$

$$\leq 2\cdot|x-1| + 3\cdot|y+2|$$

Note que $\bullet\ |x-1| = \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2} < \delta$ (*)

$\bullet\ |y+2| = \sqrt{(y+2)^2} \leq \sqrt{(y+2)^2+(x-1)^2} < \delta$

Disso, segue:

$$|f(x,y)+4| \leq 2\underbrace{|x-1|}_{<\delta} + 3\underbrace{|y+2|}_{<\delta} < 2.\delta + 3\delta = 5\delta := \varepsilon.$$

Ou seja, basta tomar $\boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{5}}$

Isto prova o limite dado. $\square$

PROPOSIÇÃO: (UNICIDADE DO LIMITE) O limite de uma função $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, se existir, é único.

DEMONSTR.: Sejam $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ e $\lim_{x\to a} f(x) = l_2$, onde $a \in \Omega'$. (i.e, a é um ponto de acumulação do conj. Ω).

Por absurdo, suponha que $l_1 \neq l_2$.

Tome $\varepsilon = d(l_1, l_2) > 0$.

Como $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$, então, $\exists\ \delta_1 > 0$

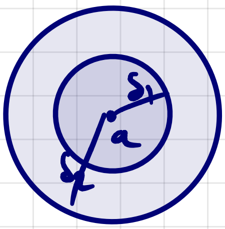
tal que $\forall x \in \Omega$ tal que

$$0 < d_{\mathbb{R}^m}(x, a) < \delta_1 \implies d_{\mathbb{R}^n}(f(x) - \ell_1) < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (I)$$

Além disso, como $\lim_{x \to a} f(x) = \ell_2$, segue que

$\exists\, \delta_2 > 0$ tal que, $\forall x \in \Omega$:

$$0 < d_{\mathbb{R}^m}(x, a) < \delta_2 \implies d_{\mathbb{R}^n}(f(x) - \ell_2) < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (II)$$



Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$

Assim, $\forall x \in \Omega$ tal que

$0 < d_{\mathbb{R}^m}(x, a) < \delta$,

valem simultaneamente (I) e (II).

Assim, teremos:

$$\varepsilon = d(\ell_1, \ell_2) \underset{\substack{\text{desigualdade}\\ \text{triangular da}\\ \text{métrica}}}{\leq} \overbrace{d(\ell_1, f(x))}^{< \frac{\varepsilon}{2},\ \text{por (I)}} + \underbrace{d(f(x), \ell_2)}_{< \frac{\varepsilon}{2},\ \text{por (II)}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\varepsilon < \varepsilon$. Absurdo!

Portanto, $\ell_1 = \ell_2$, ou seja, existindo o limite, ele será único. $\square$

No que segue vamos considerar funções
$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad (\text{i.e., funções escalares})$$

Na teoria de limites do cálculo 1 (limite de funções de uma variável real), tínhamos o importante conceito de limites laterais:
$$\lim_{x \to a^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^+} f(x).$$
E vimos, na ocasião, que
$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

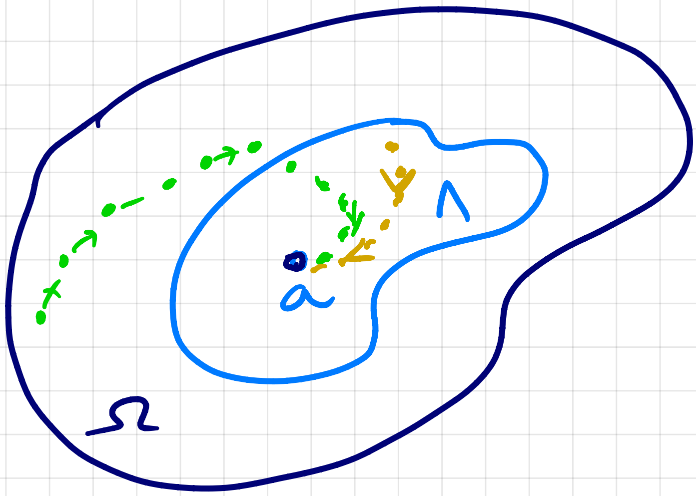
Precisamos adaptar este conceito para funções de várias variáveis.

No caso $\Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ temos:

<u>PROPOSIÇÃO:</u> Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função, $\Lambda \subset \Omega$, $\Lambda \neq \emptyset$ tal que $a \in \Omega' \cap \Lambda'$ (ou seja, $a \in \mathbb{R}^m$ é um ponto de acumulação tanto de Ω quanto de Λ). Então,
$$\lim_{x \to a} f(x) = l \implies \lim_{\substack{x \to a \\ x \in \Lambda}} f(x) = l.$$

[ou seja, o limite quando $x \to a$ por pontos em $\Lambda \subset \Omega$ também será l]

Λ é uma por um caminho.



$x \to a$: $(\forall x \in \Omega)$

$x \to a$
$x \in \Lambda$

$a \in \Omega' \cap \Lambda'$

DEMONSTR.: Dado que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$; então,

dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que, $\forall x \in \Omega$:

$$0 < d(x,a) < \delta \implies d(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

Em particular para $x \in \Lambda \subset \Omega$; tem-se que

$$0 < d(x,a) < \delta, \quad x \in \Lambda. \quad (I)$$

Para tais pontos também teremos

$$d(f(x), \ell) < \varepsilon, \quad \text{devido a } (I)$$

Ou seja, $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \Lambda}} f(x) = \ell$. $\square$