CÁLCULO 3

24/04/24 – AULA 05

Seguindo com outros exemplos de domínios para funções $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

04) $f(x,y) = \sqrt{x - y^2}$.

$D(f) = ?$

gráfico do domínio?

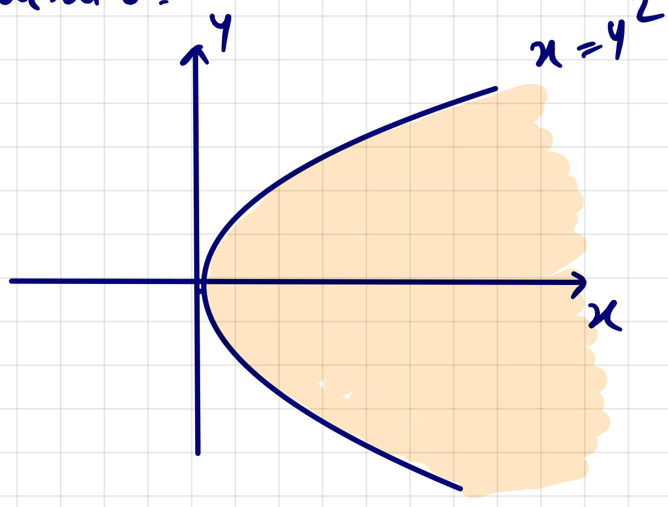
SOLUÇÃO:

condição de existência: $x - y^2 \geq 0$

$x \geq y^2$

$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2\}$.

Gráfico do domínio:

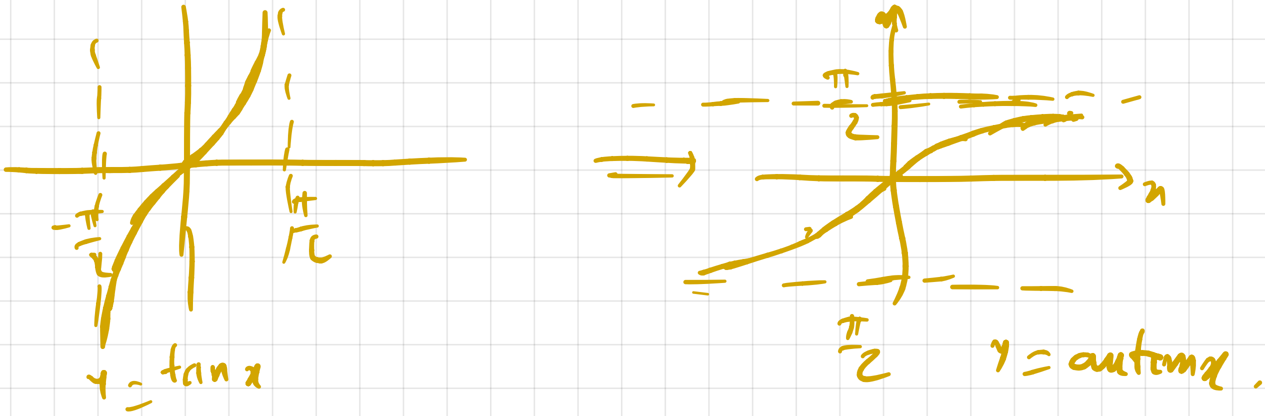


05) $f(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$.

$D(f) = ?$

gráfico do domínio?

obs: $y = \arctan x \iff x = \tan y$

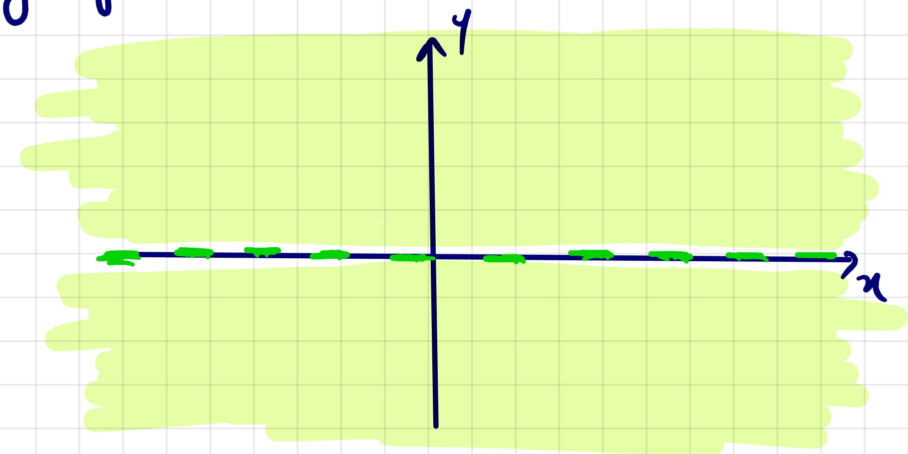


O argumento de arco tangente tem sentido, a priori, em todo o $\mathbb{R}$.

A única exigência, (condição de existência) no nosso caso, é que $y \neq 0$.

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}.$$

gráfico do domínio:



É possível esboçar o gráfico de algumas funções $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Vejamos alguns exemplos:

Determine domínio, gráfico do domínio, imagem e esboço gráfico de cada função a seguir:

(a) $f(x,y) = x^2+y^2$.

SOLUÇÃO: $z = f(x,y)$

$z = x^2+y^2 \geq 0$

ALTURA

Note que, como

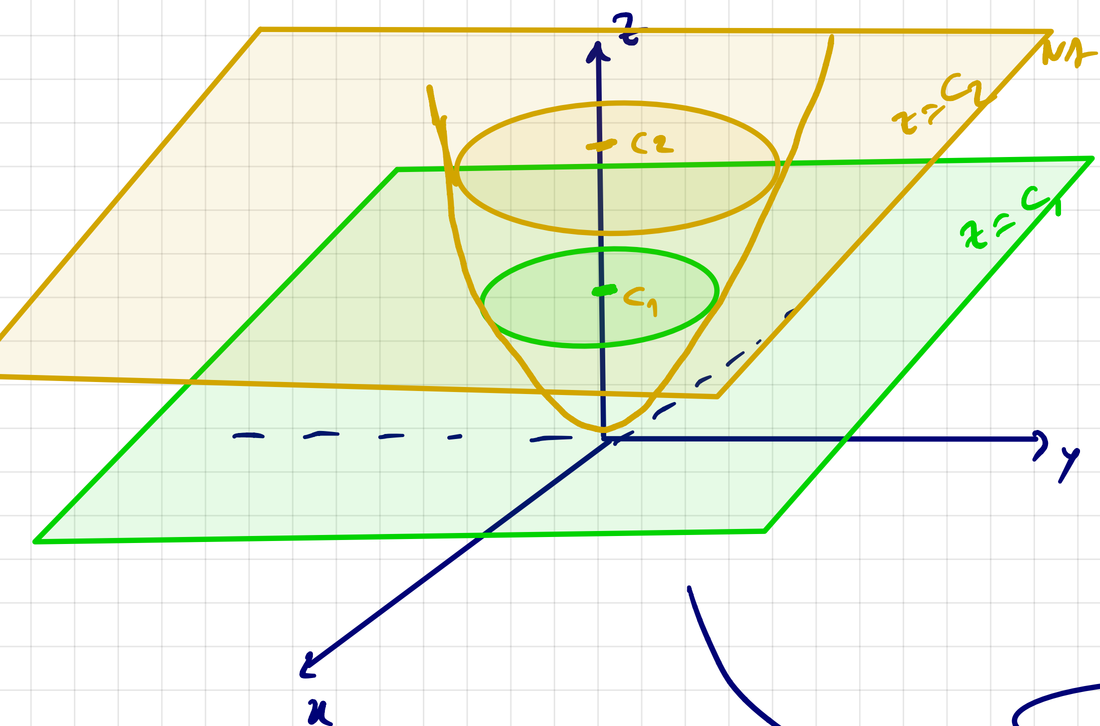
$z = f(x,y) = x^2+y^2 \geq 0$,

então,

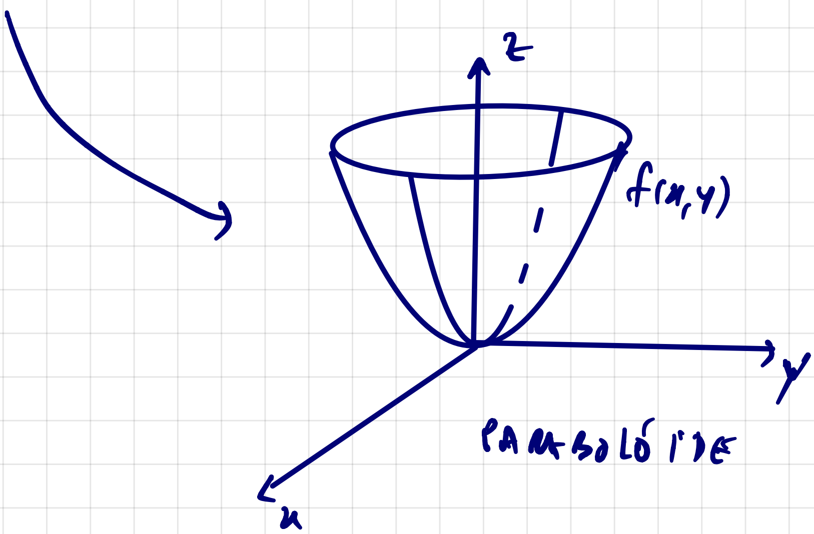
$Im(f) = [0, +\infty)$.

$x^2+y^2 = z$

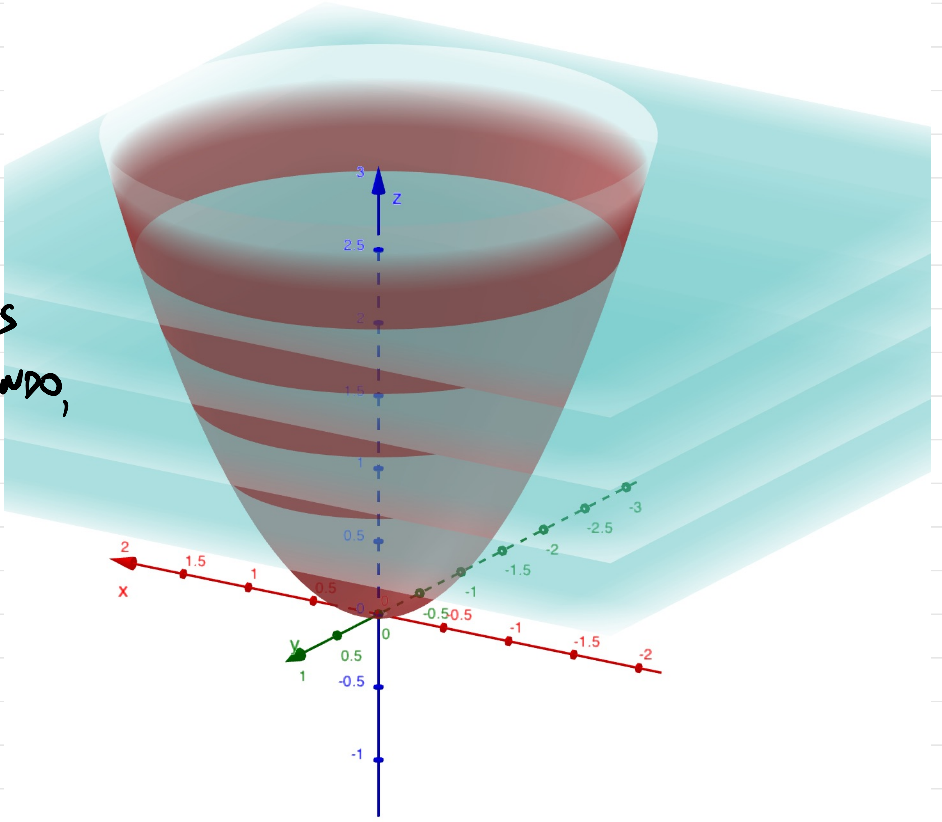
NOTE QUE, OLHANDO PARALELAMENTE AO PLANO XY, $x^2+y^2=z$ É UMA CIRCUNF. CENTRADA NA ORIGEM E RAIO $\sqrt{z}$



$D(f) = \mathbb{R}^2$



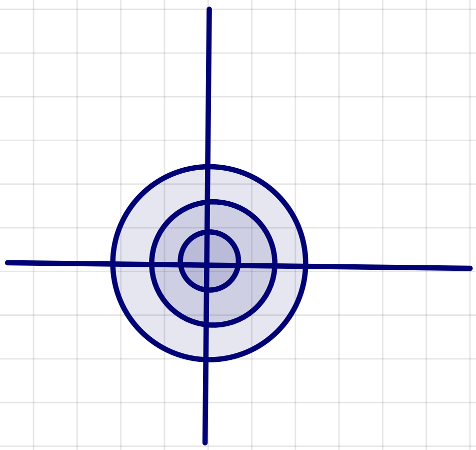
AO LADO, O GRÁFICO DA SUPERFÍCIE $z=f(x,y)$, PELO GEOGEBRA, COM ALGUNS PLANOS $z=C$ INTERCEPTANDO.



<u>Def</u>: Chama-se <u>CURVA DE NÍVEL</u> a curva obtida pelo intercepto de $z=f(x,y)$ com os planos paralelos ao plano xy: $z=c$.

Ou seja, onde $f(x,y)=c$, tem-se uma curva de nível.

No exemplo acima, um esboço das curvas de nível são circunferências $x^2+y^2=c$.



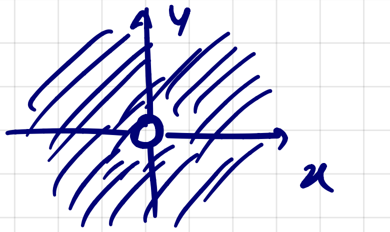
(b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ (é o "inverso" do esboço do item (a))

$D(f) = ?$ $\qquad x^2+y^2 \neq 0 \iff (x,y) \neq (0,0)$

$D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.

$f(x,y) = \dfrac{1}{\underbrace{x^2+y^2}_{>0}} > 0$ $\qquad Im(f) = (0,+\infty)$

GRÁFICO DO DOMÍNIO:



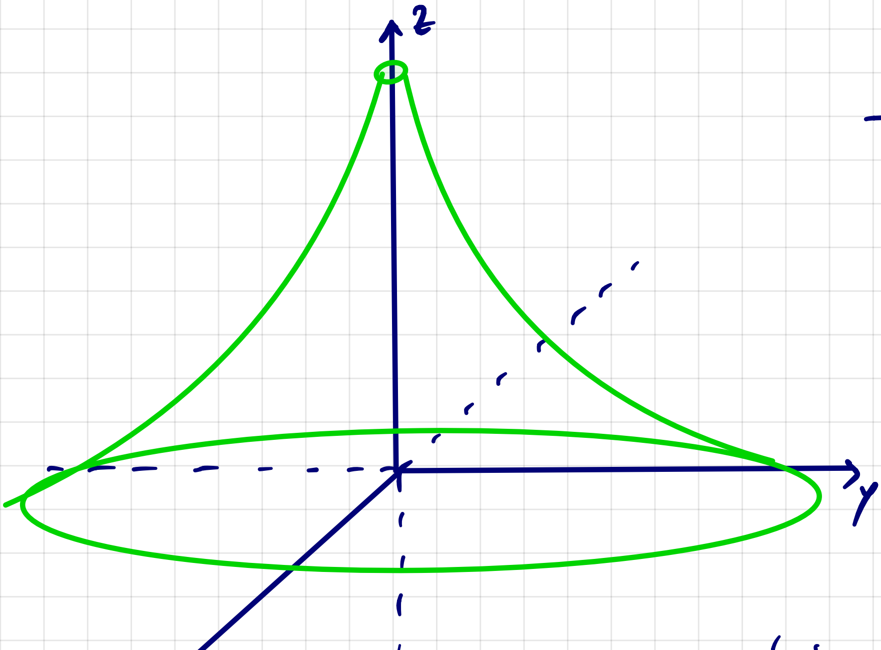
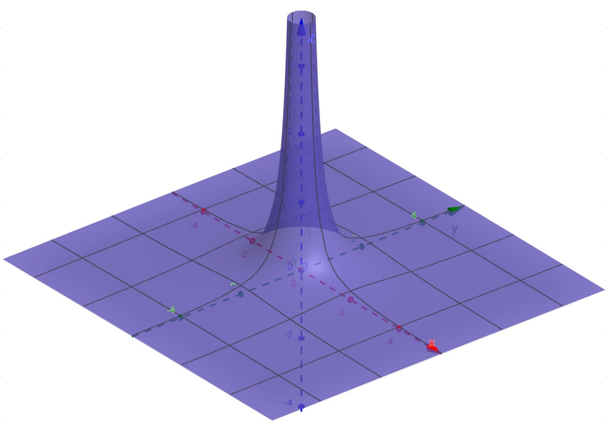


GRÁFICO DA SUPERFÍCIE



(c) $f(x,y) = \sqrt{1-4x^2-9y^2}$.

$D(f) = ?$ condição: $1-4x^2-9y^2 \geq 0$

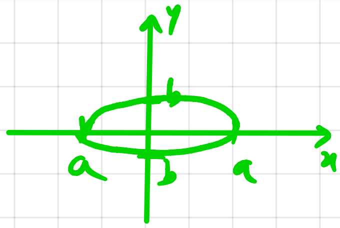
$\iff -4x^2-9y^2 \geq -1$ $(\times -1)$

$4x^2+9y^2 \leq 1$

$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} \leq 1$ (elipsóide)

MAIOR "PESO" MENOR "PESO"

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2+9y^2 \leq 1\}$

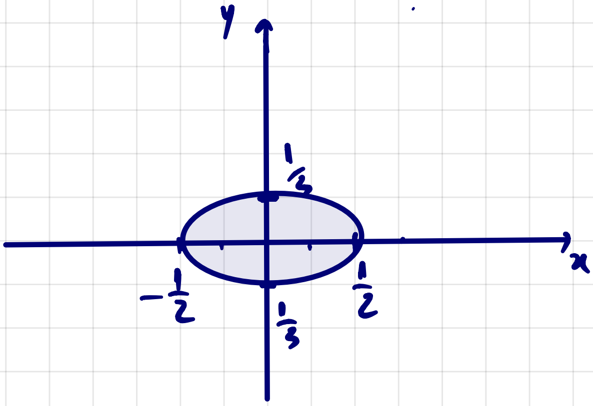


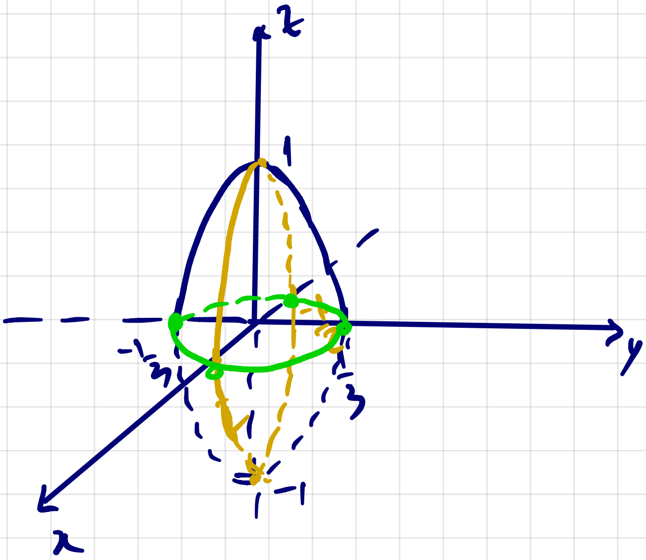
GRÁFICO DO DOMÍNIO.

GRÁFICO DA SUPERFÍCIE:

$z = f(x,y) = \sqrt{1-4x^2-9y^2}$.

$\Rightarrow z^2 = 1-4x^2-9y^2 \Rightarrow 4x^2+9y^2+z^2 = 1$

(elipsóide)

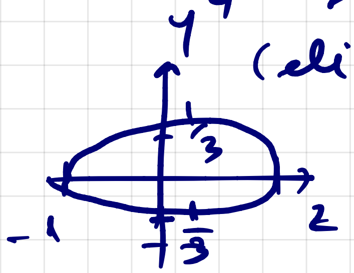


PLANO yz : (x=0)

$9y^2+z^2=1$

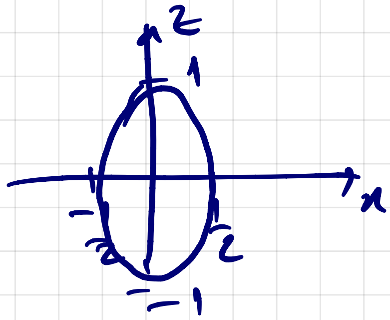
$\frac{y^2}{\frac{1}{9}} + \frac{z^2}{1} = 1$

(elipse

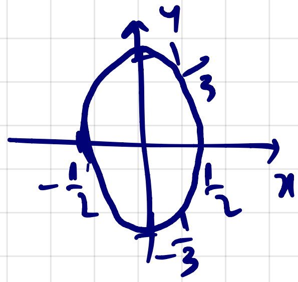


plano xz: $(y=0)$ $4x^2+z^2=1$

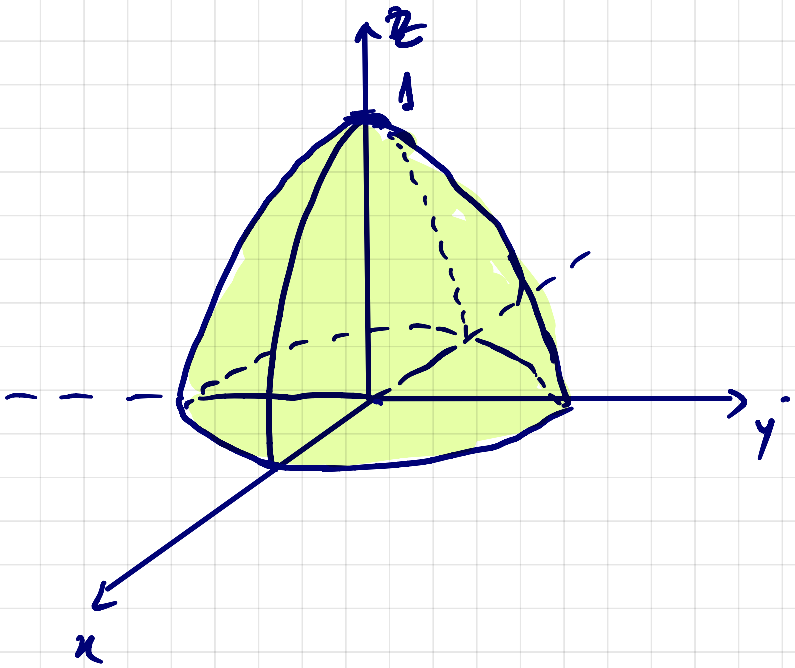
$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{z^2}{1}=1 \quad \text{(elipse)}$$

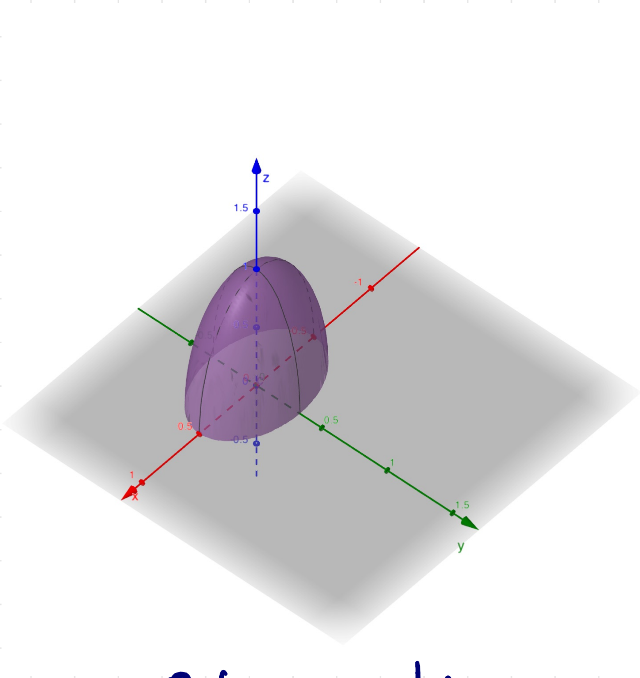


plano xy: $z=0$ $4x^2+9y^2=1$ (elipse)



Esboço gráfico de f:



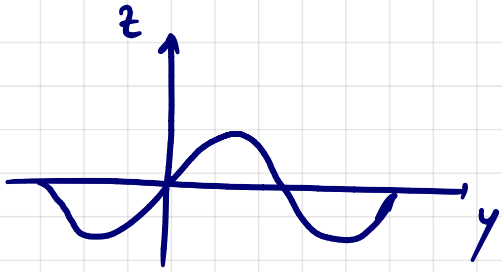


Pelo geogebra.

$Im(f)=[0,1]$.

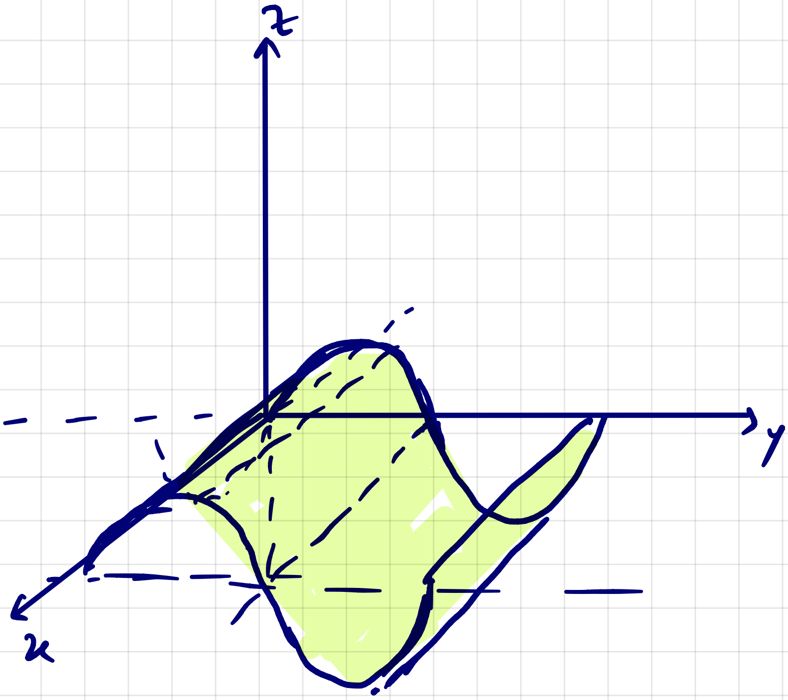
(d) $f(x,y) = \operatorname{sen} y$

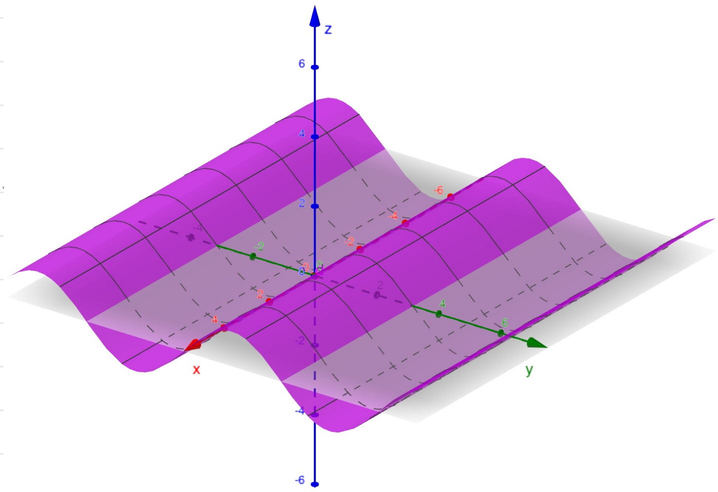
$z = \operatorname{sen} y$



$D(f) = \mathbb{R}^2.$

$Im(f) = [-1,1]$





Pelo geogebra.