CÁLCULO 3

22/04/24 – AULA 04

Da lista 01 (um exercício)

1. Seja X o conjunto das funções contínuas em $[0,1]$ e seja $\varphi : [0,1] \to (0,+\infty)$ contínua. e positiva. Defina
$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \cdot \varphi(x)\, dx.$$
Mostre que (X,d) é um espaço métrico.

(i) $d(f,g) = \int_0^1 \underbrace{\underbrace{|f(x) - g(x)|}_{\geq 0}\, \underbrace{\varphi(x)}_{>0}}_{\geq 0} dx \geq 0$ e

$$d(f,g) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 |f(x) - g(x)| . \underbrace{\varphi(x)}_{>0} dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = g(x)$$

(ii) $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| . \varphi(x) dx = \int_0^1 |g(x) - f(x)| . \varphi(x) dx$

$|a-b| = |b-a|$

$= d(g,f)$

(iii) $d(f,h) \overset{?}{\leq} d(f,g) + d(g,h)$:

$$d(f,h) = \int_0^1 |f(x) - h(x)| . \varphi(x) dx =$$

$$= \int_0^1 |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| . \varphi(x) dx \leq$$

$$\leq \int_0^1 \left(|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \right) . \varphi(x) dx =$$

desigualdade triang. do módulo

$$= \int_0^1 |f(x) - g(x)| . \rho(x)\, dx + \int_0^1 |g(x) - h(x)| . \rho(x)\, dx$$

$$= d(f,g) + d(g,h)$$

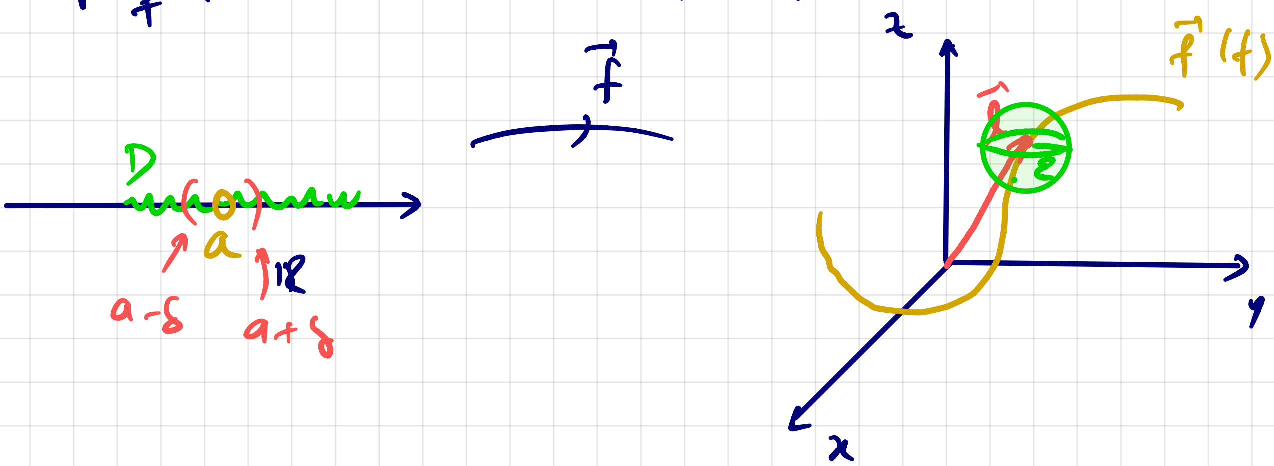
Continuando o estudo de funções de várias variáveis.

Def.: Seja $\vec{f} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ uma função vetorial de uma variável real e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação (*) do conj. D, onde $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t))$

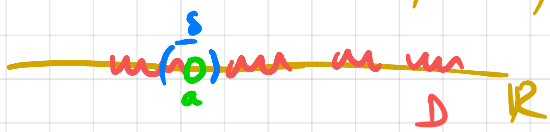
Dizemos que $\vec{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_m) \in \mathbb{R}^m$ é o limite de $\vec{f}(t)$ quando t tende para a, e escrevemos

$$\vec{l} = \lim_{t \to a} \vec{f}(t), \text{ se, e somente se,}$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que $\forall t \in D$: $0 < |t - a| < \delta$, implique em $d(\vec{f}(t) - \vec{l}) < \varepsilon$



(*) Lembre-se: $a \in D \subset \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação se, $\forall \delta > 0$, $(B_\delta(a) \cap D) \setminus \{a\} \neq \emptyset$.



PROPOSIÇÃO:

$$\lim_{t\to a} \vec{f}(t) = \left(\lim_{t\to a} f_1(t), \lim_{t\to a} f_2(t), \dots, \lim_{t\to a} f_m(t)\right),$$

desde que cada limite de cada função coordenada exista.

DEMONSTRAÇÃO: $\vec{f}: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$; $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$

Sejam $\lim_{t\to a} \vec{f}(t) = \vec{l} = (l_1, l_2, \dots, l_m)$.

Precisamos mostrar que

$$\lim_{t\to a} f_j(t) = l_j \quad , j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Como $\lim_{t\to a} \vec{f}(t) = \vec{l}$, então,

dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que, $\forall t \in D$; $0 < |t-a| < \delta$,

segue que $d(\vec{f}(t) - \vec{l}) < \varepsilon$, i.e.:

$$\sqrt{(f_1(t)-l_1)^2 + (f_2(t)-l_2)^2 + \dots + (f_m(t)-l_m)^2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(f_1(t)-l_1)^2} < \varepsilon ; \\ \sqrt{(f_2(t)-l_2)^2} < \varepsilon \\ \vdots \\ \sqrt{(f_m(t)-l_m)^2} < \varepsilon \end{cases}$$

[ou seja, como a soma de m aditivos maiores ou iguais a zero, é menor do que $\varepsilon > 0$, então cada um dos seus somandos o será].

ou seja, mostramos que

$$|f_1(t)-l_1|<\varepsilon; \quad |f_2(t)-l_2|<\varepsilon; \ldots$$

$$\ldots |f_m(t)-l_m|<\varepsilon$$, sempre que

$0<|t-a|<\delta$, ou seja, mostramos que

$$\lim_{t\to a} f_j(t) = l_j, \quad j\in\{1,2,\ldots,m\}.$$

A recíproca se faz analogamente. $\square$

Ex.: Calcule

$$\lim_{t\to 1}\left(\frac{t^3-2t^2+1}{t^4-1}, \frac{\sqrt{2t+1}-\sqrt{3}}{t^2-1}, \frac{t^3}{t+1}\right)$$

SOLUÇÃO:

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^3-2t^2+1}{t^4-1}$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{t^3}-2t^2+1 & t-1 \\ \hline -\cancel{t^3}+t^2 & t^2-t-1 \\ \hline \quad -\cancel{t^2}+1 & \\ \quad \cancel{t^2}-t & \\ \hline \qquad -t+\cancel{1} & \\ \qquad +t-1 & \\ \hline \qquad\ 0 & \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$t^3-2t^2+1=(t^2-t-1)\cdot(t-1)$$

$$
\begin{array}{r|l}
\cancel{t^4} - 1 & t - 1 \\
\hline
-\cancel{t^4} + t^3 & t^3 + t^2 + t + 1 \\
\hline
\cancel{t^3} - 1 & \\
-\cancel{t^3} + t^2 & \\
\hline
\cancel{t^2} - 1 & \\
-\cancel{t^2} + t & \\
\hline
t - \cancel{1} & \\
-t + \cancel{1} & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$\hookrightarrow (t^3+t^2+t+1).(t-1) = t^4 - 1$

Assim:

- $\displaystyle \lim_{t\to 1} \frac{t^3-2t^2+1}{t^4-1} = \lim_{t\to 1} \frac{(t^2-t-1)\cancel{(t-1)}}{(t^3+t^2+t+1).\cancel{(t-1)}} = \frac{\cancel{1}-\cancel{1}-1}{1+1+1+1} = -\frac{1}{4}$

- $\displaystyle \lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{2t+1}-\sqrt{3}}{t^2-1} = \lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{2t+1}-\sqrt{3}}{t^2-1} \cdot \frac{\sqrt{2t+1}+\sqrt{3}}{\sqrt{2t+1}+\sqrt{3}} =$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{2t+1-3}{(t+1)(t-1).\left[\sqrt{2t+1}+\sqrt{3}\right]} = \lim_{t\to 1} \frac{2\cancel{(t-1)}}{(t+1)\cancel{(t-1)}\left(\sqrt{2t+1}+\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{2}{(1+1).(\sqrt{3}+\sqrt{3})} = \frac{\cancel{2}}{2.\cancel{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

- $\displaystyle \lim_{t\to 1} \frac{t^3}{t+1} = \frac{1}{2}$

Portanto, obtemos

$$\lim_{t\to 1}\left(\frac{t^3-2t^2+1}{t^4-1}, \frac{\sqrt{2t+1}-\sqrt{3}}{t^2-1}, \frac{t^3}{t+1}\right) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right)$$

PROPRIEDADES: Sejam $\vec{f}(t)$, $\vec{g}(t)$ funções definidas em $D \subset \mathbb{R}$ para $\mathbb{R}^m$, com $\lim_{t\to a}\vec{f}(t) = \vec{l}$, e $\lim_{t\to a}\vec{g}(t) = \vec{m}$. Então:

(01) $\lim_{t\to a} \vec{f}(t) \pm \vec{g}(t) = \vec{l} \pm \vec{m}$

(02) $\lim_{t\to a} \vec{f}(t) . \vec{g}(t) = \vec{l} . \vec{m}$, onde o ponto "." é o PRODUTO ESCALAR.

DERIVADAS:

Def.: Seja $\vec{f}: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ uma função vetorial e $a \in D$. Dizemos que $\vec{f}$ é derivável em a se existir o limite:

$$\vec{f}'(a) = \lim_{t\to a}\frac{\vec{f}(t)-\vec{f}(a)}{t-a}$$

Escrevendo $h = t - a$, então $h \to 0$ quando $t \to a$, e disso escrevemos

$$\vec{f}'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{f}(a+h)-\vec{f}(a)}{h}.$$

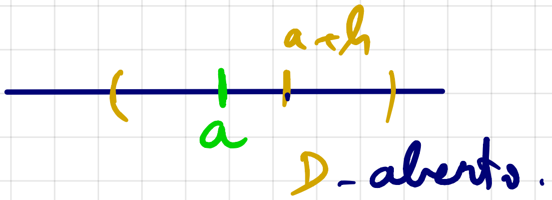
Def.: Seja $\vec{f}: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ uma função. Definimos a função derivada $\vec{f}': D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ a função

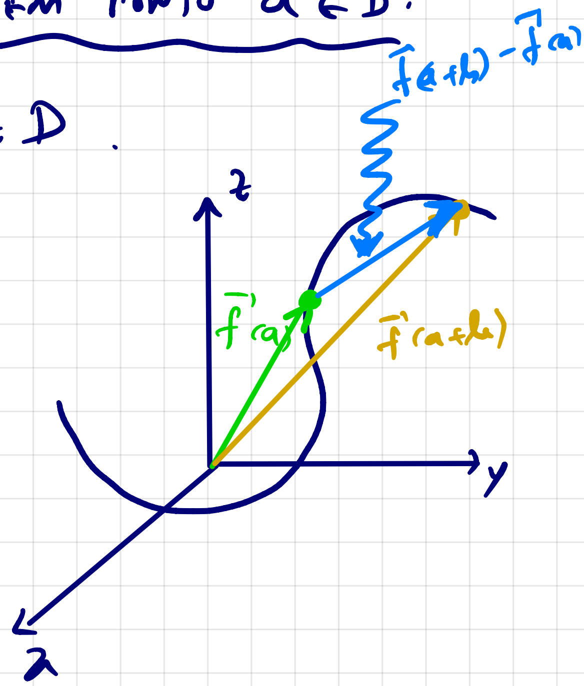
$$\vec{f}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

se o limite existir.

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DA DERIVADA EM PONTO $a \in D$.

Seja $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$; e $a \in D$.





Seja $h \in \mathbb{R}$ tal que $a+h \in \text{int}(D)$.

Vamos examinar $\vec{f}(a+h) - \vec{f}(a)$. Note que, à medida em que $h \in \mathbb{R}$ diminui, o ponto $\vec{f}(a+h)$ se aproxima do ponto $\vec{f}(a)$; e com isso, o vetor $\vec{f}(a+h) - \vec{f}(a)$ vai se aproximando de um vetor tangente à curva $\vec{f}(t)$ no ponto $\vec{f}(a)$. O caso limite é quando $h \to 0$, obtendo

$$\lim_{h \to 0} \frac{\vec{f}(a+h) - \vec{f}(a)}{h} = \vec{f}'(a)$$

Ou seja, a derivada de $\vec{f}(t)$ em um ponto a fornece o vetor tangente à curva no referido ponto.

Fisicamente, se $\vec{f}(t)$ denota a eq da posição de um móvel ao longo do tempo, então, $\vec{f}'(t_0)$ representará o vetor velocidade, tangente à curva em t_0.

<u>PROPOSIÇÃO</u>: Sendo $\vec{f}(t)$ derivável, onde $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$, então, $\vec{f}'(t) = \left(f_1'(t), f_2'(t), \dots, f_m'(t)\right)$

<u>DEMONSTR.</u>:

$$\vec{f}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \Big(f_1(t+h) - f_1(t),\ f_2(t+h) - f_2(t), \dots,$$

$$\dots f_m(t+h) - f_m(t)\Big)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}, \frac{f_2(t+h) - f_2(t)}{h}, \dots, \frac{f_m(t+h) - f_m(t)}{h} \right)$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}, \ldots, \lim_{h\to 0} \frac{f_m(t+h) - f_m(t)}{h} \right)$$

$$= \left(f_1'(t), f_2'(t), \ldots, f_m'(t) \right)$$

Ex. 1 Calcule a derivada de

$$\vec{f}(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, \operatorname{sen}(t^3 - e^t), \ln \frac{t}{t-1} \right)$$

Solução:

$$f_1(t) = \frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f_1'(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot t^{-\frac{3}{2}} \cdot 1 = -\frac{1}{4} t^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{t^3}} = -\frac{1}{4t\sqrt{t}}$$

$$f_2(t) = \operatorname{sen}(t^3 - e^t) = \cos(t^3 - e^t)(3t^2 - e^t)$$

$$f_3(t) = \ln \frac{t}{t-1} = \ln t - \ln(t-1)$$

$$\Rightarrow f_3'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} = \frac{\cancel{t} - 1 - \cancel{t}}{t(t-1)} = -\frac{1}{t(t-1)}$$

Portanto, obtemos:

$$\vec{f}'(t) = \left(f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t) \right) =$$

$$\vec{f}'(t) = \left(-\frac{1}{4t\sqrt{t}} , (3t^2 - e^t) \cdot \cos(t^3 - e^t) , -\frac{1}{t(t-1)} \right)$$

Voltando ao caso $\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$, considerando, inicialmente $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (função escalar)

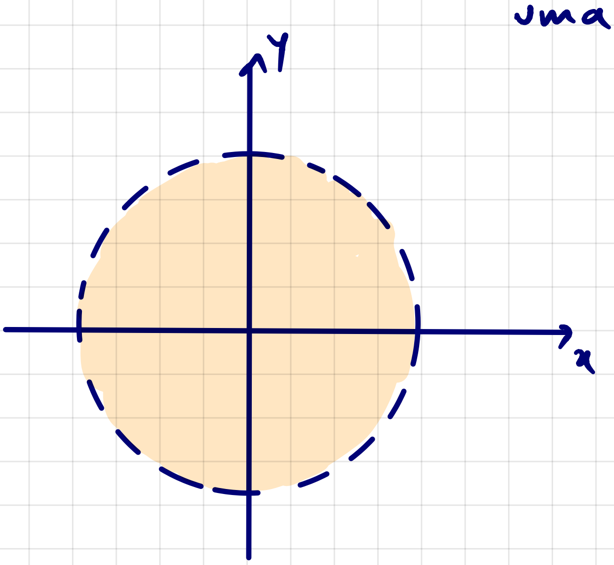
01) Obter o domínio de $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

condição de existência: $1 - x^2 - y^2 > 0$

$\iff x^2 + y^2 < 1$.

$D(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \}$

gráfico do domínio (pois em $\mathbb{R}^2$ o domínio é uma região)



não é compacto do $\mathbb{R}^2$, pois, embora seja limitado, não é fechado.

02) Idem para $f(x,y) = \ln(1 - xy)$

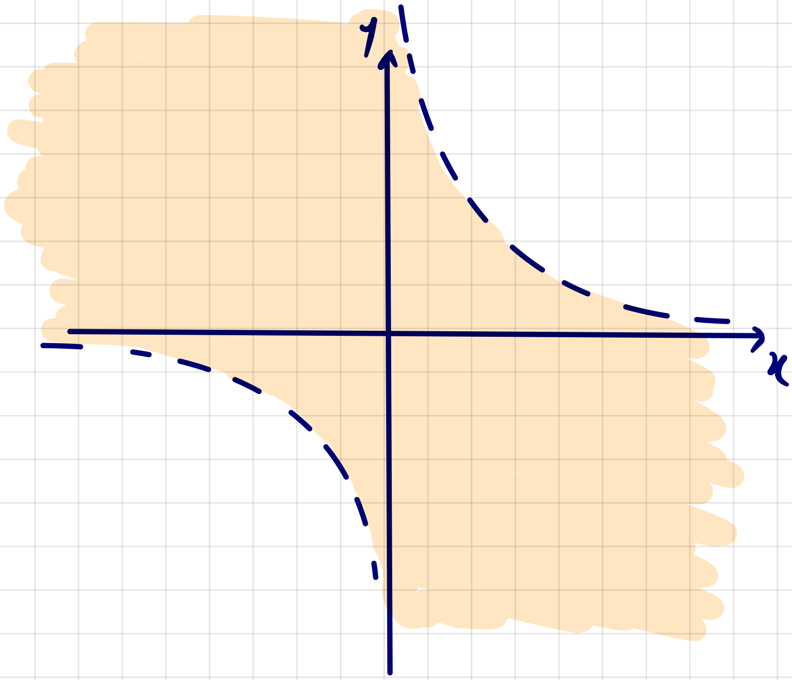
Solução: condição de existência:

$$1 - xy > 0 \iff xy < 1$$

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y < 1\}.$$

gráfico do domínio:

$$xy < 1 \iff y < \frac{1}{x}$$



03) $f(x,y) = \sec(x-y)$.

lembrai-vos:

$$\sec w = \frac{1}{\cos w},$$

logo, $\nexists$ $\sec w$ onde $\cos w = 0$

$$\Updownarrow$$

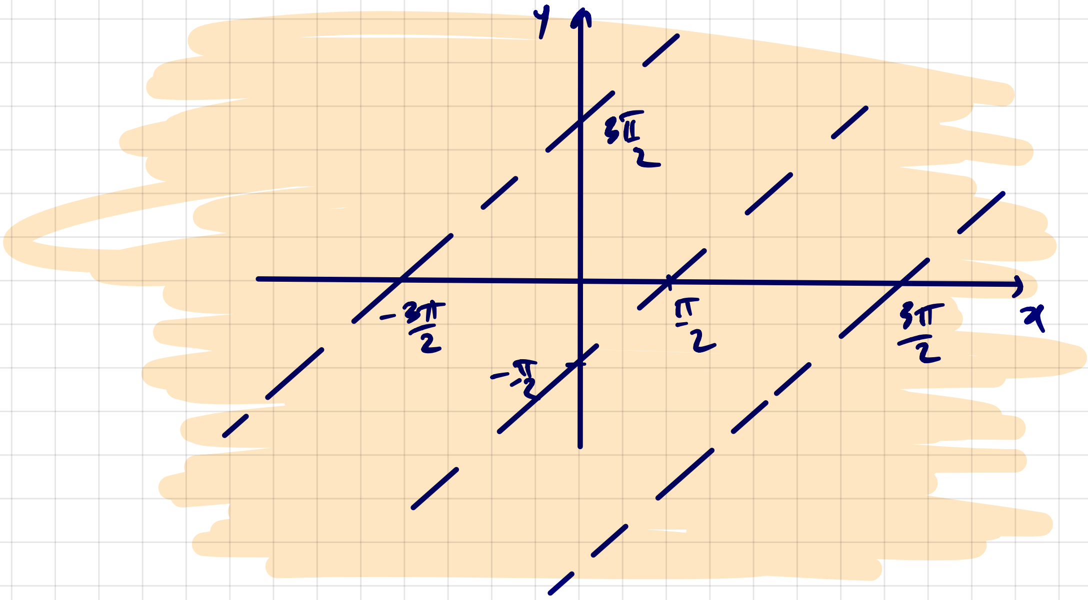
$$w \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

condição de existência:

$$x - y \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow x \neq y + k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y + k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$


y
x
3π/2
-3π/2
π/2
3π/2
-π/2