CÁLCULO 3

19/04/24 – AULA 03

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS:

São funções $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$,

$$x \in \mathbb{R}^m \longmapsto f(x) \in \mathbb{R}^n$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

$$f(x) = \left(f_1(x_1, \dots, x_m), f_2(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_m)\right)$$

é uma função de m variáveis reais para o $\mathbb{R}^n$.

Cada função $f_i = f_i(x_1, \dots, x_m)$, $i \in \{1, \dots, n\}$ chama-se uma FUNÇÃO COORDENADA.

Ex.: Uma transformação linear

$$T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

é uma função de várias variáveis reais.

Por exemplo,

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ dada por}$$

$$T(x, y) = (x - 2y,\ x + 3y,\ 2x + y)$$

é uma função de duas variáveis reais.

As funções
$$f_1(x, y) = x - 2y$$
$$f_2(x, y) = x + 3y$$
$$f_3(x, y) = 2x + y$$

são as funções coordenadas da função f.

Outros exemplos (não lineares):

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 ;$$

$$f(x, y, z) = (\overbrace{xy}^{f_1}, \overbrace{z \cdot \operatorname{sen}(x+y)}^{f_2}),$$

é uma função de três variáveis formada por duas funções coordenadas: f_1 e f_2

Quando tivermos $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, a função é chamada de uma função escalar.

Quando tivermos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, f é chamada de função vetorial, levando pontos da reta para vetores em $\mathbb{R}^m$.

Inicialmente, focaremos nosso estudo em funções vetoriais $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$.

Uma função vetorial $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ é da forma

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t))$$

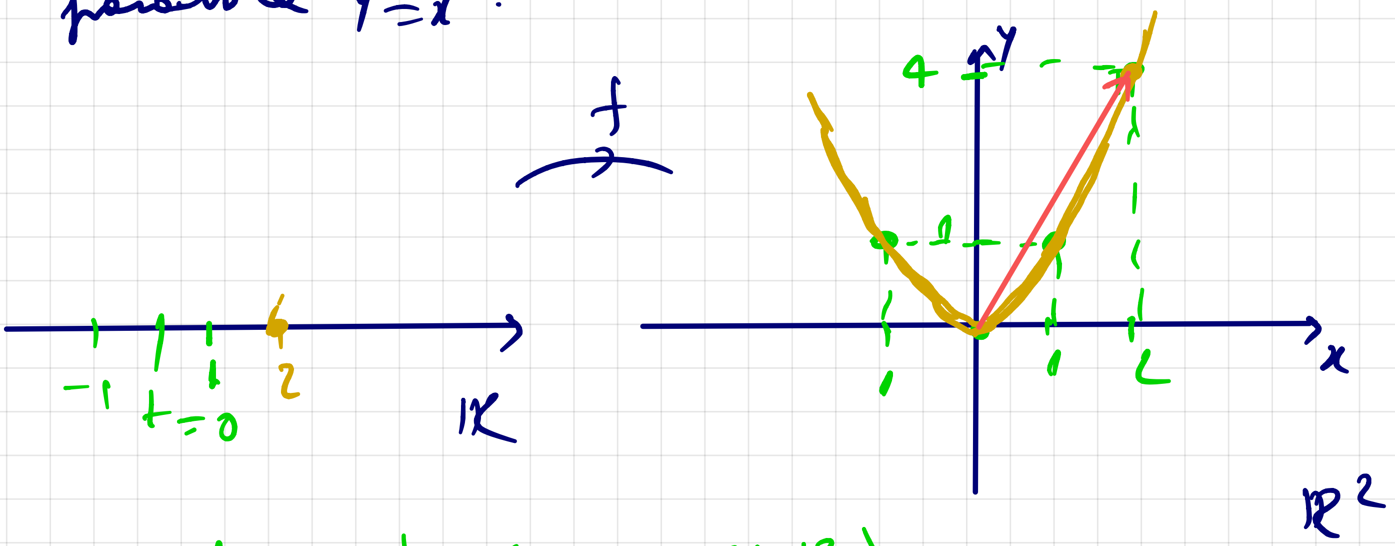
FUNÇÕES COORDENADAS.

Ex: 01) $\vec{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $\vec{f}(t) = (t, t^2)$

Neste caso temos

$$\left.\begin{array}{l} x := f_1(t) = t \\ y := f_2(t) = t^2 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = t^2 \end{array}\right. > y = x^2$$

Ou seja, $\vec{f}$ é a parametrização da parábola $y = x^2$.



t	$(x, y) = (t, t^2)$	
0	(0, 0)	(vetor)
1	(1, 1)	(vetor)
2	(2, 4)	(vetor)
-1	(-1, 1)	(vetor)

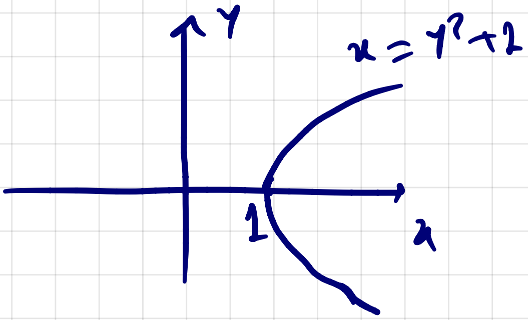
02) $\vec{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(t) = (t^2+1, t, 2t)$

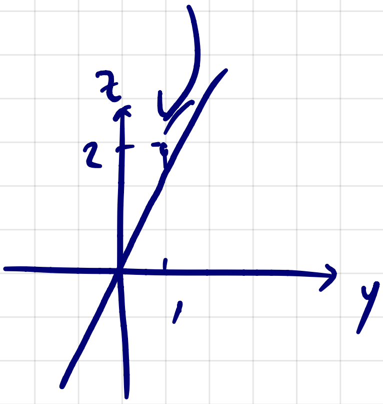
$$\begin{cases} x = t^2+1 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

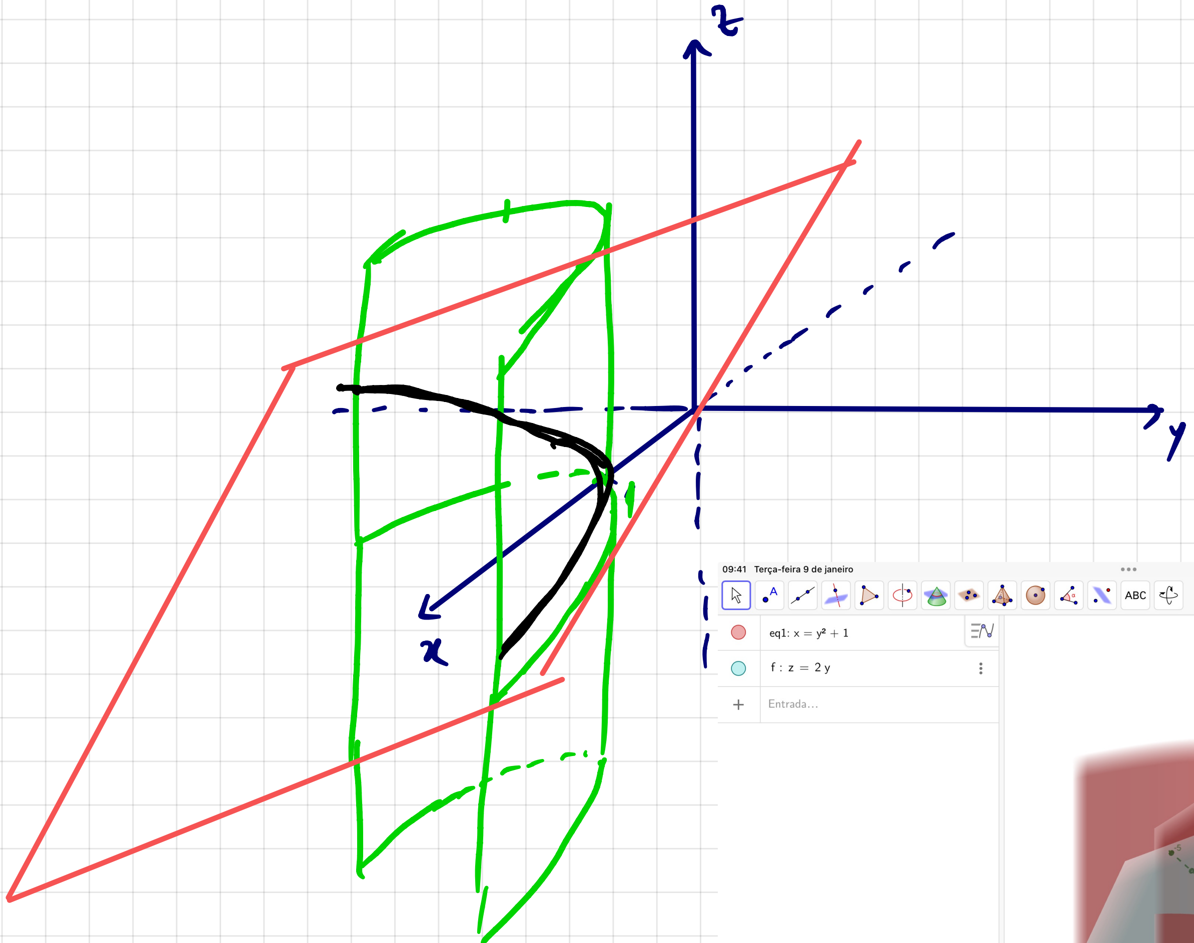
$x = y^2+1$ (parábola no plano xy)

(funções coordenadas)

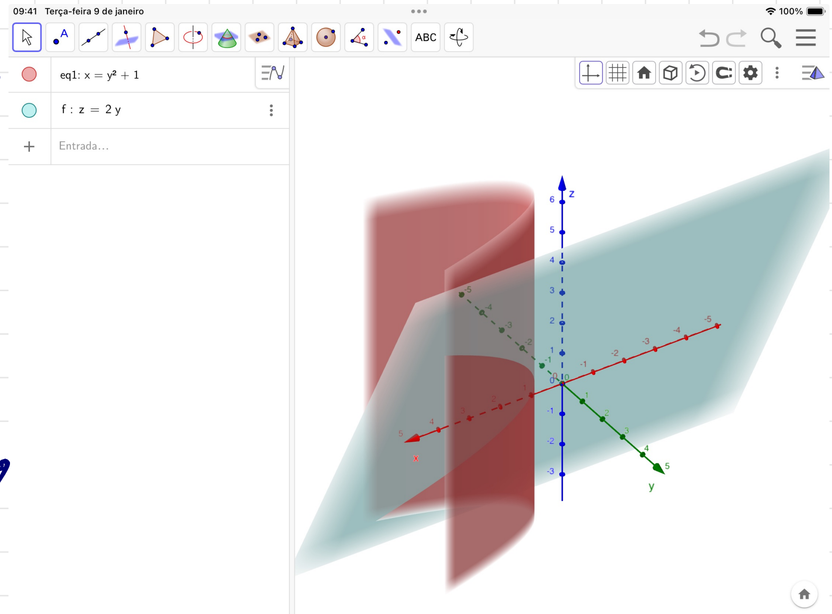
$z = 2y$ (reta no plano yz)

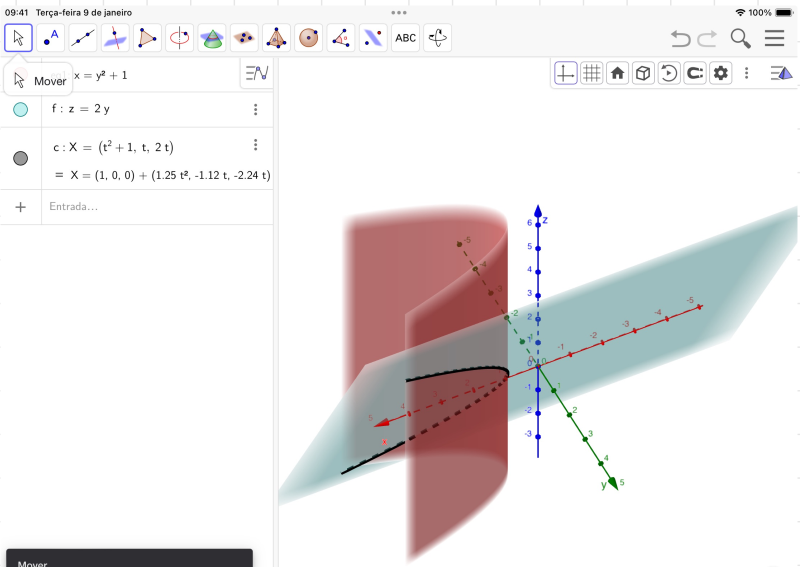




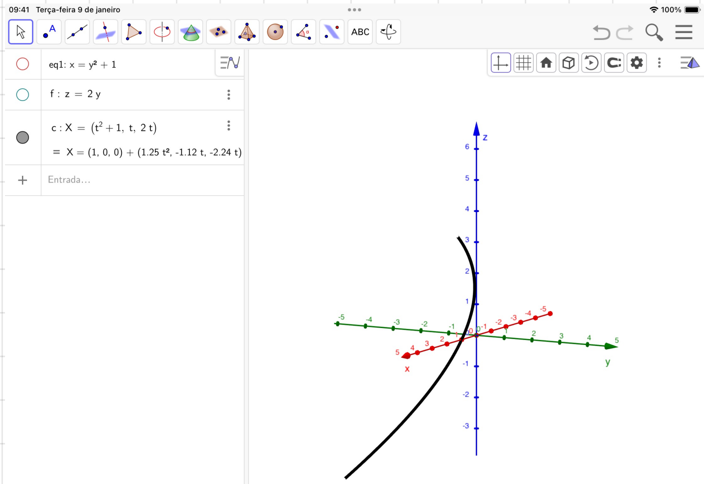


PELO GEOGEBRA.





Com a parametrização.



Traçado final.

03) $\vec{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$; $\quad \vec{f}(t) = (\operatorname{sen} t, 2, \cos t)$

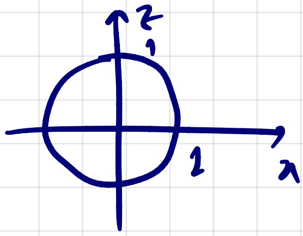
Neste caso, temos:

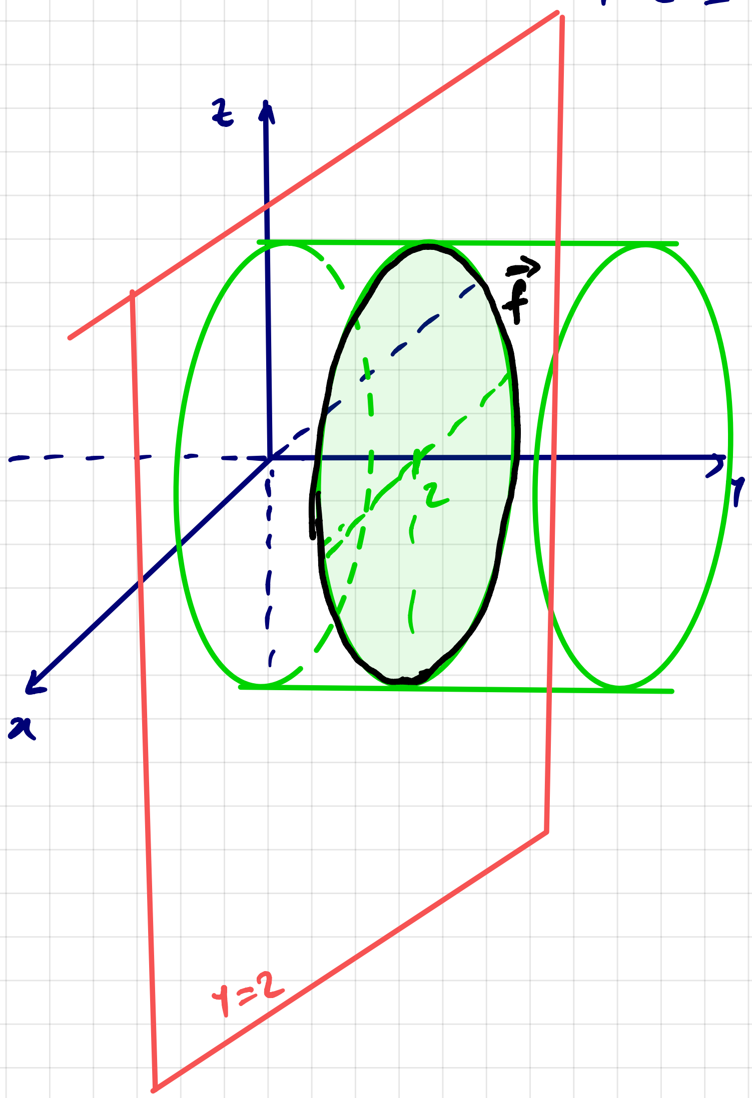
$$\begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = 2 \\ z = \cos t \end{cases}$$

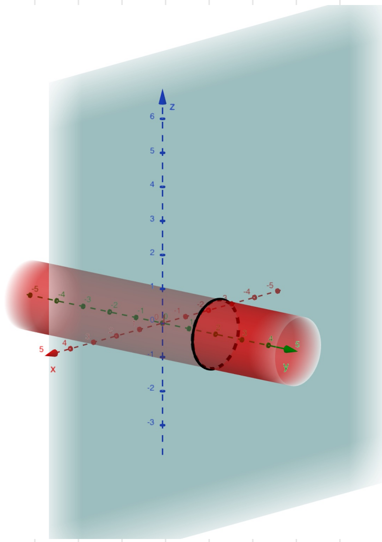
$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$

$x^2 + z^2 = 1$

circunferência de raio unitário centrada na origem.





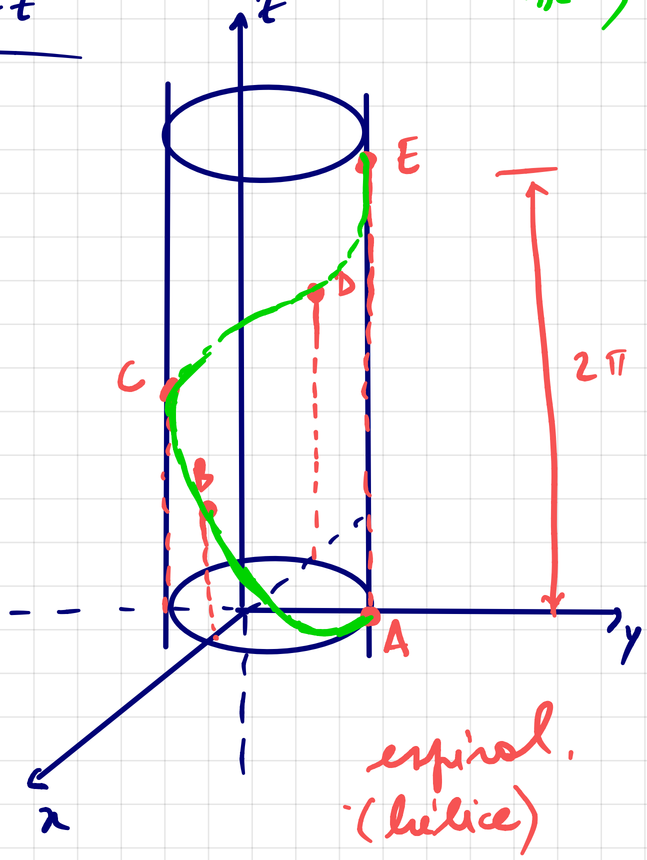


04) $\vec{f}(t) = (\text{sen}\,t, \cos t, t)$

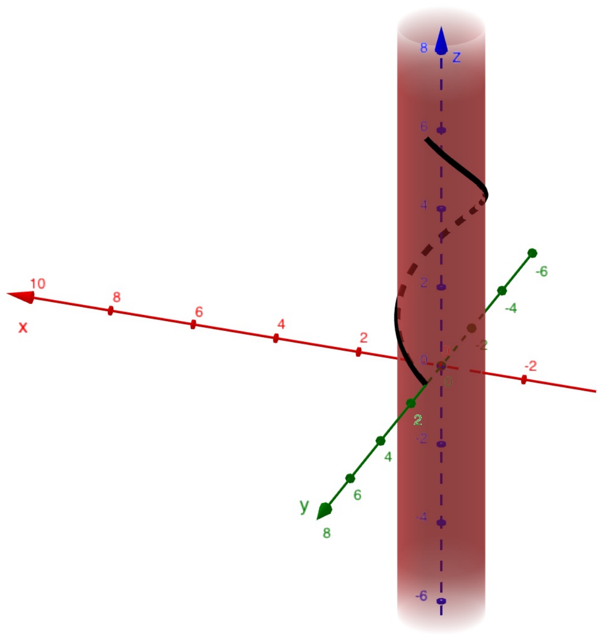
$$\left\{\begin{array}{l} x = \text{sen}\,t \\ y = \cos t \\ z = t \end{array}\right. \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

(t vai "passeando" sobre o cilindro $x^2+y^2=1$, pois estamos em $\mathbb{R}^3$)

	$x = \text{sen}\,t$	$y = \cos t$	$z = t$
A	0	1	0
B	1	0	$\frac{\pi}{2}$
C	0	-1	π
D	-1	0	$\frac{3\pi}{2}$
E	0	1	2π



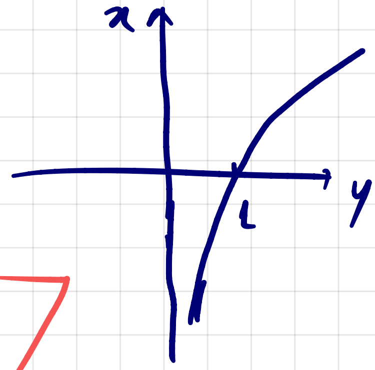
espiral. (hélice)

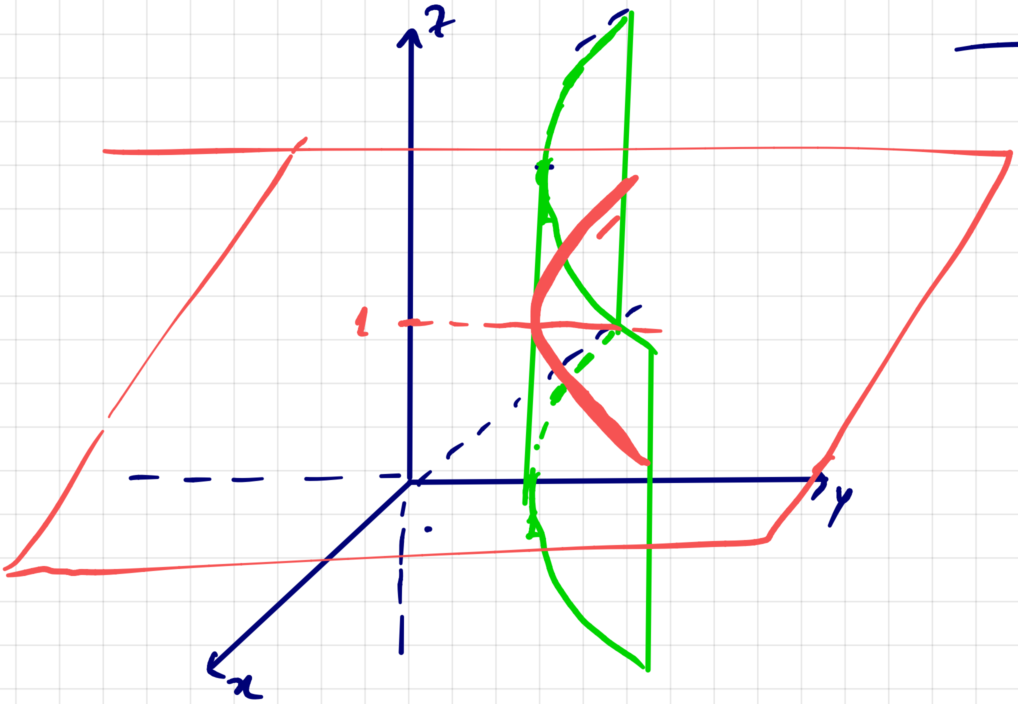


05) $\vec{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(t)$

$$\vec{f}(t) = (\ln t,\ t,\ 1).$$

$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \Bigg\rangle\ x = \ln y$$





Def.: O Domínio D de uma função vetorial

$\vec{f}: \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ é o conjunto

formado pela interseção dos domínios das funções coordenadas. Ou seja, sendo

$$\vec{f}(t) = (f_1(t),\ f_2(t), \dots, f_n(t)),$$

então

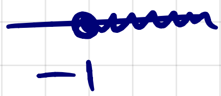
$$\Omega = D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_n,$$

onde D_i, é o domínio da função coordenada f_i.

Ex.: Obter o domínio da função vetorial $\vec{f}(t) = \left(\sqrt{t+1}, \frac{1}{t^2-4}, \sqrt{1-2t}\right)$

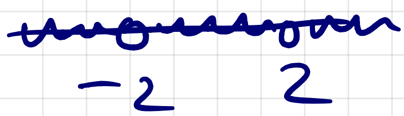
Solução: • $f_1(t) = \sqrt{t+1}$. $D_1 = ?$

$$t+1 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -1.$$

D_1: 

• $f_2(t) = \frac{1}{t^2-4}$; $D_2 = ?$

$$t^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow t \neq \pm 2$$

D_2: 

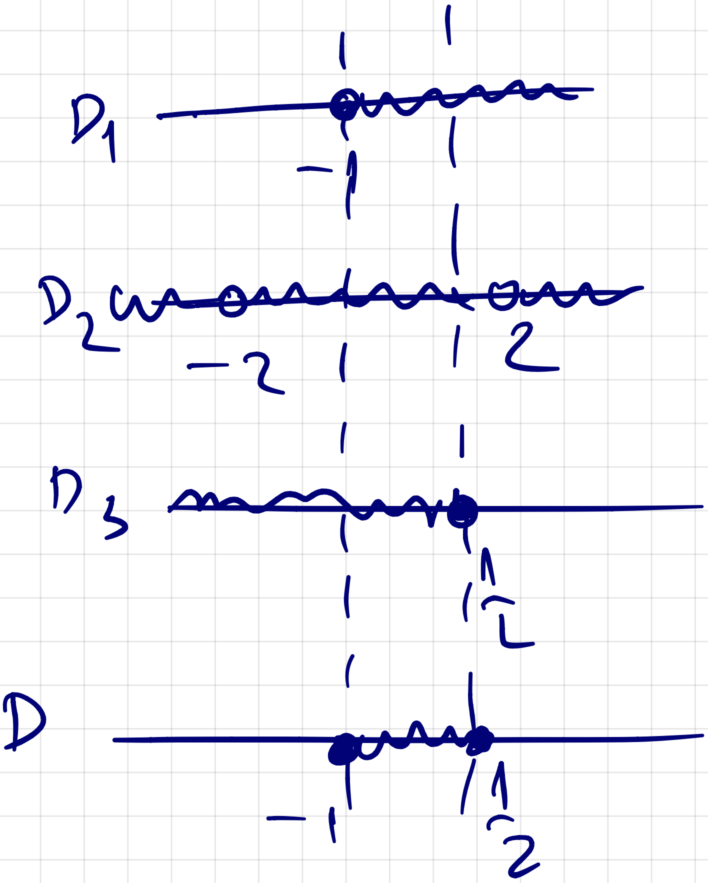
• $f_3(t) = \sqrt{1-2t}$. $D_3 = ?$

$$1-2t \geq 0 \Leftrightarrow -2t \geq -1$$

$$\Leftrightarrow 2t \leq 1 \Leftrightarrow t \leq \frac{1}{2}$$

Por fim, teremos:

$$D = D_1 \cap D_2 \cap D_3$$



$$D(f) = \left[-1, \frac{1}{2}\right]$$