Cálculo 3.

17/04/24 – AULA 02

Na aula passada estudamos o conceito de espaço métrico.

$M \neq \emptyset$. $d : M \times M \to [0, +\infty)$ é uma MÉTRICA se, e só se:

$$d(x,y) \geq 0 \quad e \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$$

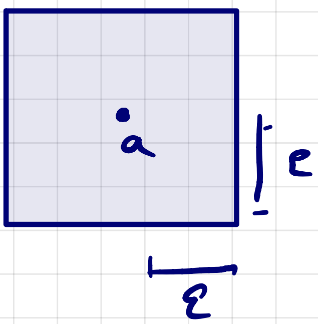
$$d(x,y) = d(y,x)$$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

Assim, (M,d) é chamado de um ESPAÇO MÉTRICO.

Vimos o conceito de BOLA em um espaço métrico.

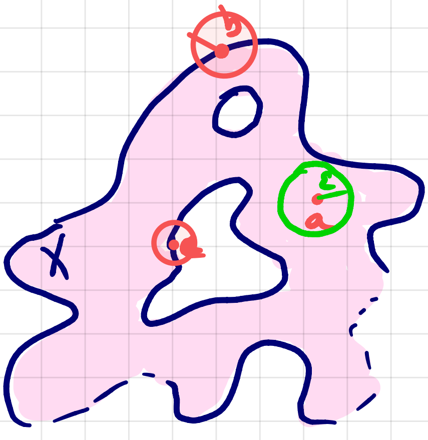
$$\overline{B_\varepsilon(a)} = \{x \in M : d(x,a) \leq \varepsilon\}.$$



$\overline{B(a,\varepsilon)}$

(lembrem do KIKO)

Def.: Seja $X \subset M$ um conj. não vazio em um espaço métrico M. Dizemos que um ponto $a \in M$ é interior ao conj. X se, e somente se $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $B(a,\varepsilon) \subset X$.



a é interior a X pois $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a) \subset X$.

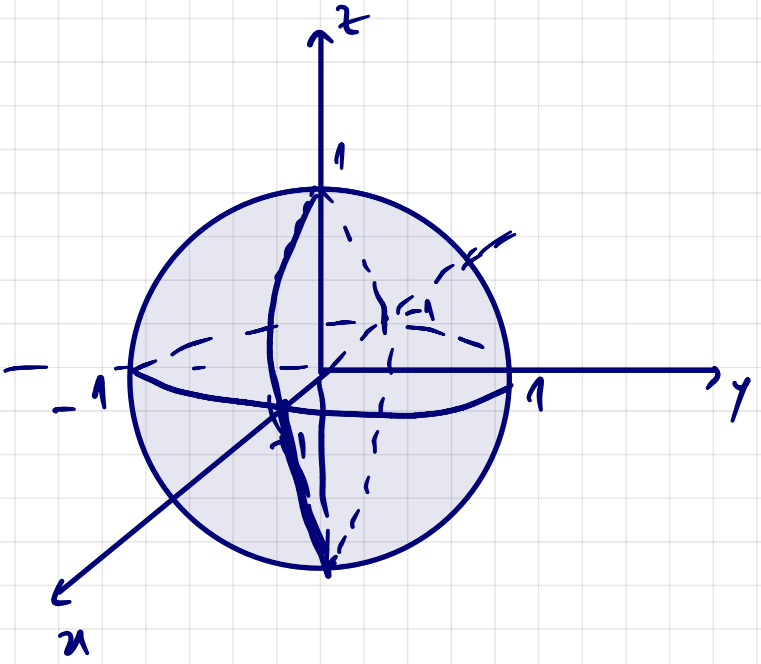
$b, c \notin$ ao interior de X, pois, $\forall \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(b) \not\subset X$ e $B_\varepsilon(c) \not\subset X$.

O conjunto de todos os pontos interiores do conj. X é chamado de interior do conjunto X, e é denotado por int (X).

Ex.: $X = \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^3$, com a métrica euclidiana, ou seja $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : d_2((x,y,z),(0,0,0)) \leq 1\}$

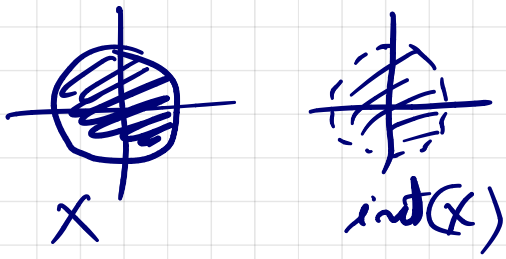
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} \leq 1\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$



$$\text{int}(X) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

caso bidimensional



PROPOSIÇÃO: Sejam X, Y conjuntos em um espaço métrico M. Então,

$$X \subset Y \Rightarrow \operatorname{int}(X) \subset \operatorname{int}(Y).$$

DEMONSTRAÇÃO:

Suponha que $X \subset Y$. A mostrar: $\operatorname{int}(X) \subset \operatorname{int}(Y)$. Para isto, dado $a \in \operatorname{int}(X)$ qualquer, precisamos mostrar que $a \in \operatorname{int}(Y)$. De fato, como $a \in \operatorname{int}(X)$, então $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a) \subset X$.

Logo:

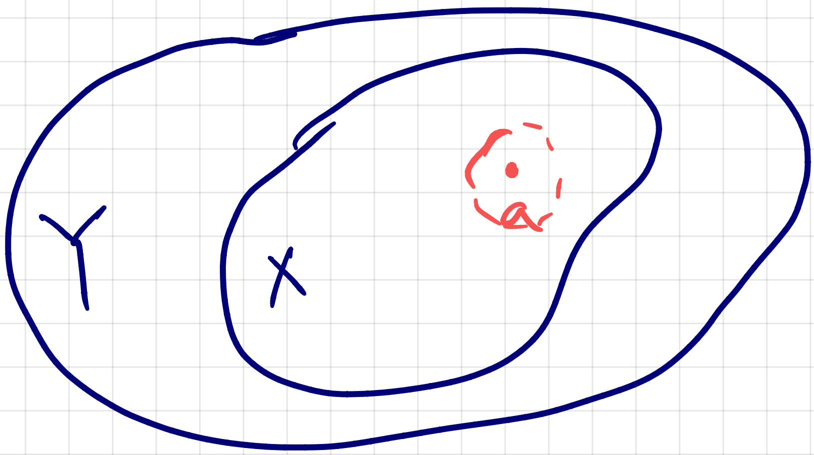
$$B_\varepsilon(a) \subset X \underset{\uparrow}{\subset} Y \Rightarrow B_\varepsilon(a) \subset Y,$$

HIPÓTESE

ou seja, $a \in \operatorname{int}(Y)$.

Portanto, $\operatorname{int}(X) \subset \operatorname{int}(Y)$.

$\square$

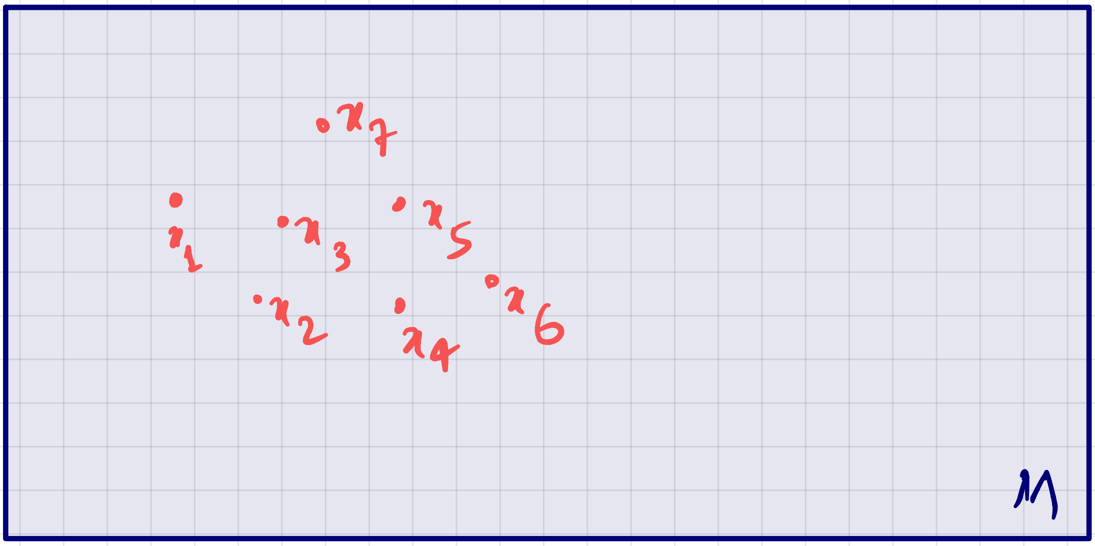


Def.: Dizemos que um conj. X em um espaço métrico M é um <u>aberto de M</u> se todos os seus pontos forem interiores. Ou seja, se $X = \text{int}\, X$.

SEQUÊNCIAS:

Def.: Uma sequência (x_n) em um espaço métrico M é um conjunto de pontos em M (conj. infinito)

$$(x_n) = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) \quad ; \quad x_i \in M, \forall i$$

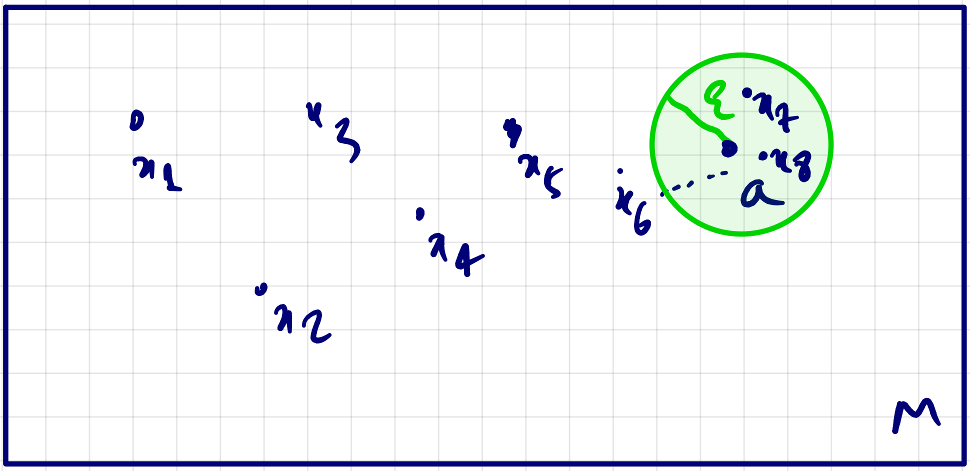


Def.: Seja (x_n) uma sequência em um espaço métrico (M, d). Dizemos que $a \in M$ é o limite da sequência (x_n) quando n tende ao infinito, e escrevemos

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

se, e somente se,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tal que}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$



Todas as propriedades aritméticas de limites valem para sequências (adaptadas)

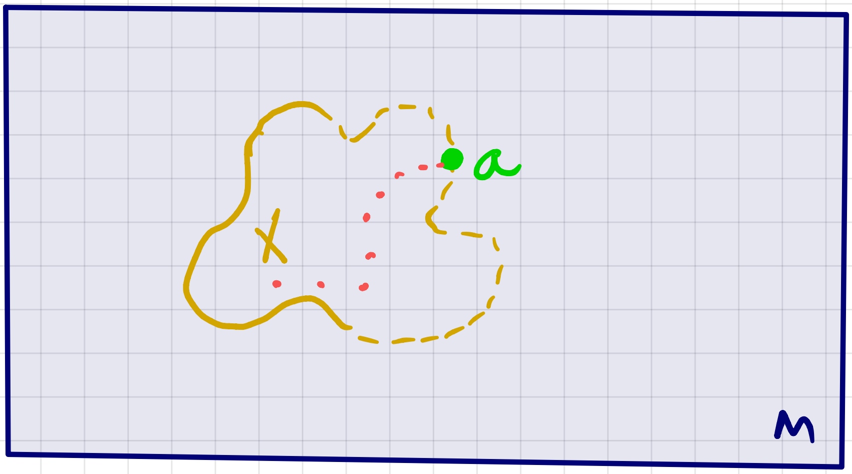
Ex.: (x_n), (y_n) sequências tais que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad e \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b;$$

Então $$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = a+b.$$

NOTAÇÃO: $$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff x_n \to a.$$

Def.: Sejam (M,d) um espaço métrico, $X \subset M$ um conjunto em M. Dizemos que $a \in M$ é um <u>ponto aderente</u> ao conjunto X se, e somente se, existir uma seq. $(x_n) \subset X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.



$a \notin X$;

porém, posso tomar uma seq. $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \to a$.

Logo $a \in M$ é um ponto aderente ao conj. X.

Def.: Chama-se <u>FECHO</u> de um conj $X \subset M$ o conjunto de todos os pontos aderentes a X, e é denotado por $\overline{X}$.

Ou seja;

$$\overline{X} = \{ x \in M : \exists (x_n) \subset X \text{ tal que } x_n \to x \}.$$

Note que todo ponto de X é aderente a X; basta tomar a seq. constante:

$$(x_n) = (x, x, x, x, \ldots).$$

Então $x_n \to x$; logo, $x \in \overline{X}$.

conclusão: $\forall x \in X \Rightarrow x \in \overline{X}$; ou seja,

$$X \subset \overline{X}$$

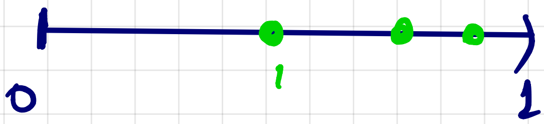
Def.: Dizemos que um conj. $X \subset M$ é **fechado** quando $X = \overline{X}$.

Como sempre vale que $X \subset \overline{X}$, podemos enfraquecer essa definição dizendo que:
$X \subset M$ é fechado se, e só se $\overline{X} \subset X$.

Ex.: $M = \mathbb{R}$.

$X = [0,1)$ é fechado em $\mathbb{R}$?

Não, pois $1 \notin X$, mas $1 \in \overline{X}$



De fato, defina (x_n) por

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \doteq \{1,2,3,\dots\}$$

$$x_1 = 0 \in X$$

$$x_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \in X.$$

$$x_3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \in X$$

$$\vdots$$

$$x_n = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1.$$

$\overline{X} = [0,1]$

Logo, $1 \in \overline{X}$, mas $1 \notin X$. Logo, X não é fechado

Proposição: Um conj. $X \subset M$ é um fechado de M se, e somente se, o seu complementar $X^c = M \setminus X$, for um aberto de M.

Demonstr.: É vista em cursos de Análise.

Ex.: em $M = \mathbb{R}$, o conj. $\mathbb{Z}$ dos inteiros é fechado de $\mathbb{R}$.

$$\ldots \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \qquad \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Z}^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1),$$ uma

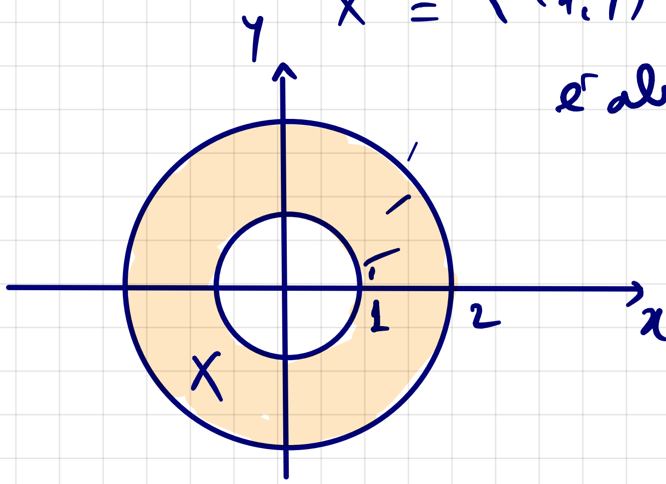
união infinita de abertos, logo, é um aberto.

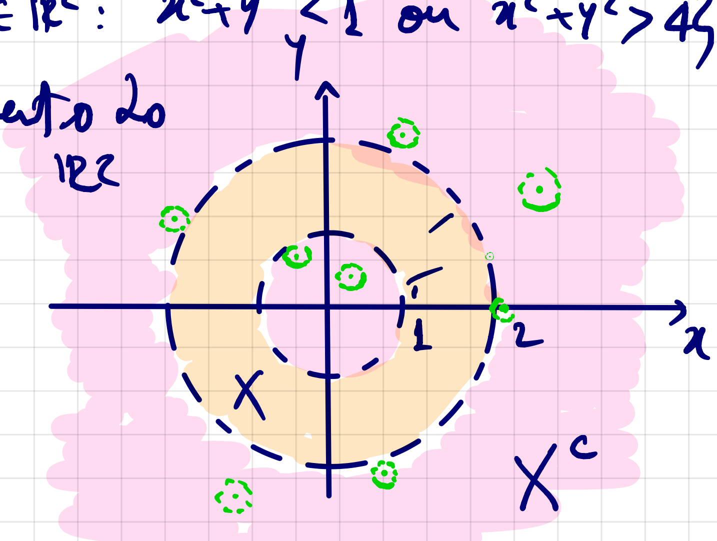
Portanto, $\mathbb{Z}$ é um fechado de $\mathbb{R}$.

Ex.: em $\mathbb{R}^2$, com a métrica euclidiana, o conj. $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ é um fechado do $\mathbb{R}^2$, pois

$X^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1 \text{ ou } x^2+y^2 > 4\}$

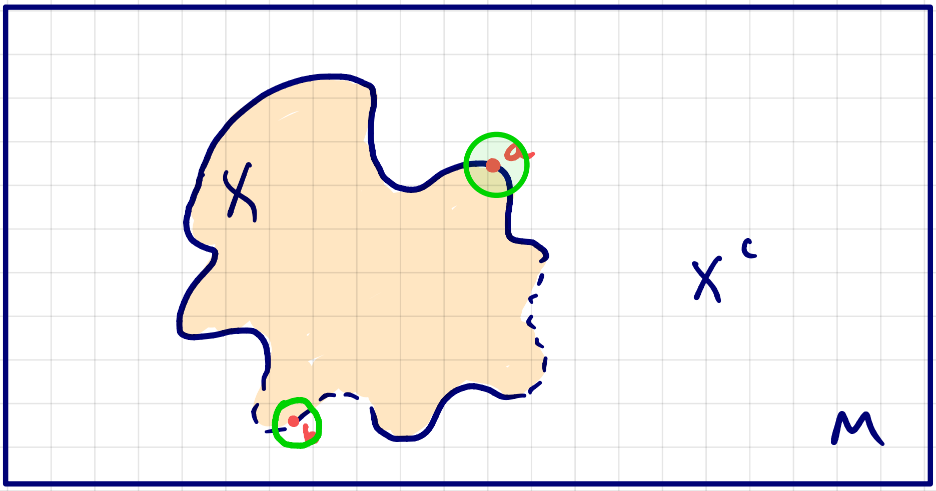
é aberto do $\mathbb{R}^2$





Def.: Dizemos que um ponto $a \in M$ é um ponto de fronteira de um conjunto X se, e só se, $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que

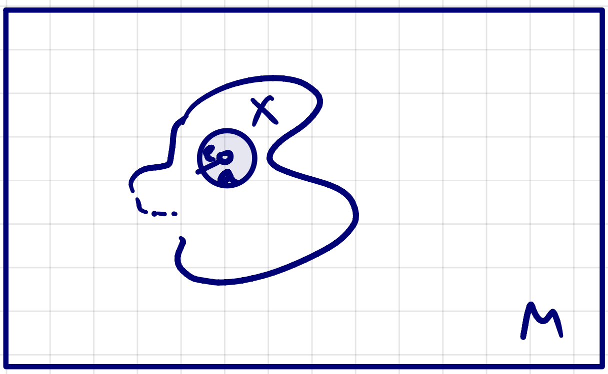
$$B_\varepsilon(a) \cap X \neq \emptyset \quad \text{e} \quad B_\varepsilon(a) \cap X^c \neq \emptyset.$$



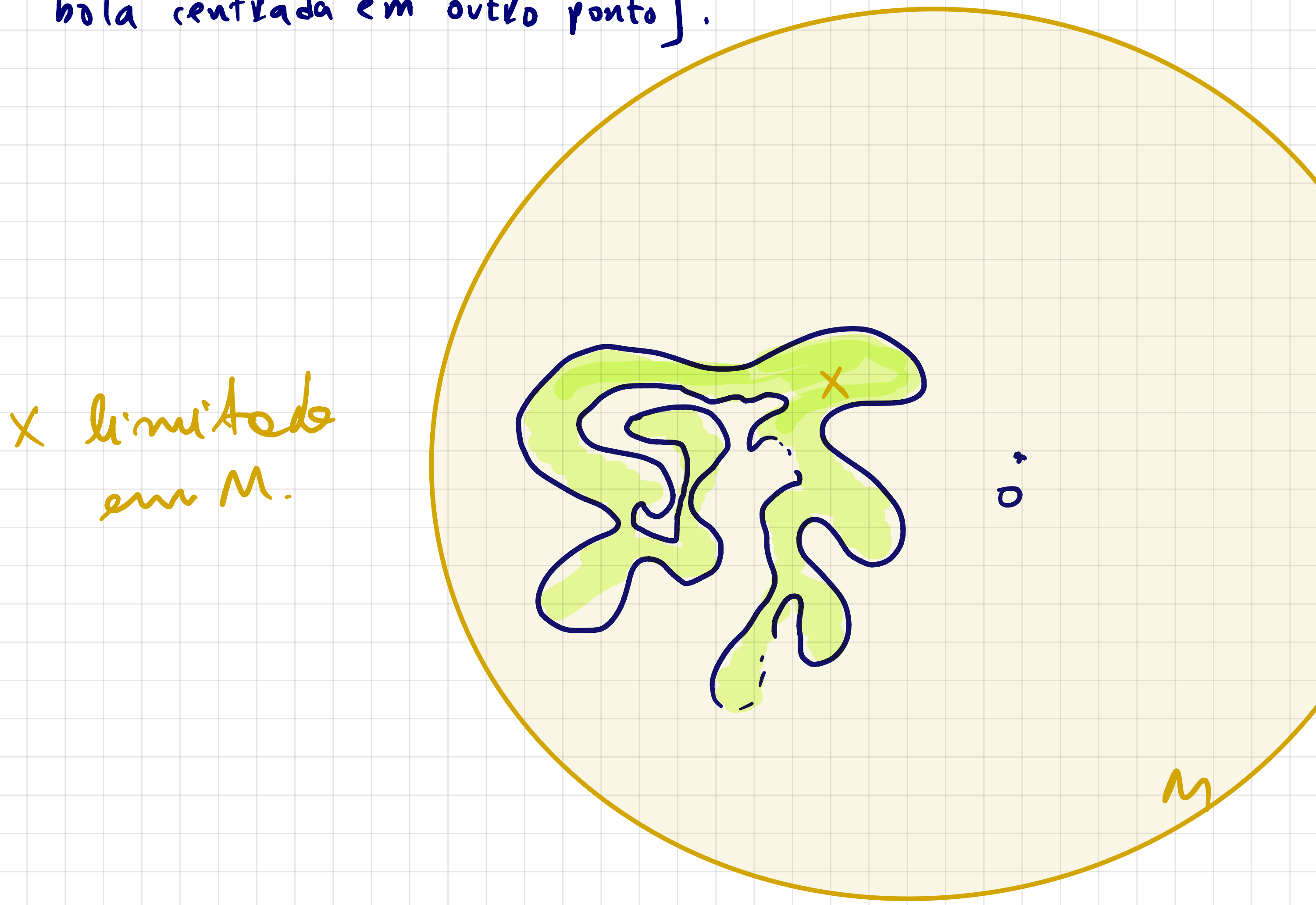
O conjunto de todos os pontos de fronteira é chamado de fronteira do conj.; e é denotado por ∂X.

Def.: Dizemos que um ponto $a \in M$ é um ponto de acumulação de um conjunto $X \subset M$ se, e somente se, $\exists\, \varepsilon > 0$, tal que

$$\left(B_\varepsilon(a) \setminus \{a\}\right) \cap X \neq \emptyset.$$



Def.: Dizemos que um conjunto $X \subset M$ é limitado no espaço métrico (M,d) se $\exists\, R>0$ tal que $X \subset B_R(0)$. [de fato, pode ser uma bola centrada em outro ponto].



Def.: Um conj $X \subset M$ é COMPACTO em M se, e só se, for limitado e fechado.

No desenho acima, X não é compacto, pois embora seja limitado, ele não é fechado (veja as partes da fronteira pontilhadas).