CÁLCULO 3

$\boxed{15/04/24 \text{ – AULA 01}}$

Nesta disciplina estudaremos o cálculo diferencial e integral, de funções de várias variáveis reais. Para isto, vários resultados dos cálculos anteriores deverão ser adaptados e/ou substituídos no caso à várias variáveis.

Para ajudar essas adaptações precisamos recorrer a alguns conceitos topológicos que descreveremos inicialmente.

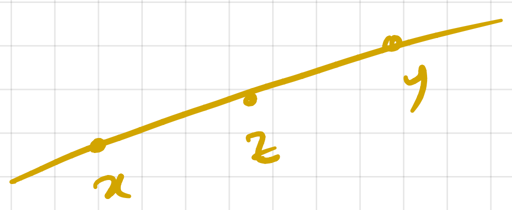
NOÇÕES DE TOPOLOGIA:

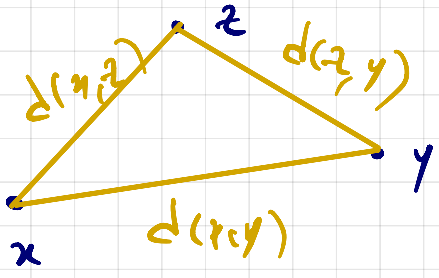
Def.: Seja $M \neq \emptyset$ um conjunto qualquer. Definimos como métrica (ou função distância) toda aplicação $d: M \times M \to [0, +\infty)$ tal que cumpre as seguintes propriedades: $\forall\, x, y, z \in M$;

(i) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (POSITIVIDADE)

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (SIMETRIA)

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (DESIGUALDADE TRIANGULAR)

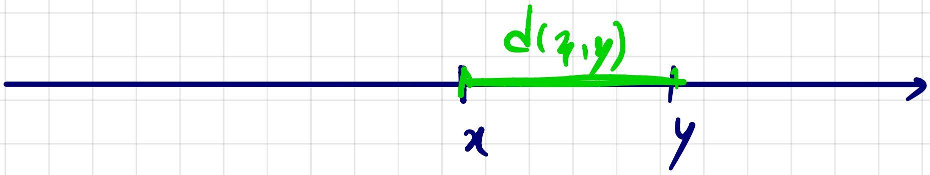




Um conjunto $M \neq \emptyset$ equipado com uma métrica d, forma um ESPAÇO MÉTRICO, e é denotado por (M, d). Porém, toda vez em que a métrica estiver clara, pode-se, simplesmente chamar de M ao espaço métrico, já que a métrica d ficaria subentendida.

Ex: $(\mathbb{R}, d)$, sendo d a métrica induzida pelo módulo, ou seja;

$$d(x,y) = |x-y|$$



$(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico, pois: $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$, temos:

(i) $d(x,y) = |x-y| \geq 0$; e

$$d(x,y) = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x-y=0 \iff x = y.$$

(ii) $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$

(iii) $d(x,y) = |x-y| = |x - z + z - y| =$

$$= |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z| + |z-y| =$$

DESIGUALDADE TRIANG.

DO MÓDULO

$(|a+b| \leq |a|+|b|)$

$$= \underbrace{d(x,z) + d(y,z)}$$

Ou seja o cálculo 1 e o cálculo 2 foram desenvolvidos sobre o espaço métrico $\mathbb{R}$, equipado com a métrica $d(x,y) = |x-y|$, ou seja, a métrica induzida pelo módulo.

Vejamos outros exemplos.

01) $(\mathbb{R}^2, d_1)$ onde $d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty)$ é

a métrica da soma, dada por:

$$d_1((x,y),(a,b)) = |x-a| + |y-b|$$

De fato, d_1 é métrica, pois: $\forall\, (x,y), (a,b), (m,n)$ pontos de $\mathbb{R}^2$, temos:

(i) $d((x,y),(a,b)) = \underbrace{|x-a|}_{\geq 0} + \underbrace{|y-b|}_{\geq 0} \geq 0$; e

$$d((x,y),(a,b)) = 0 \iff |x-a| + |y-b| = 0$$

$$\iff |x-a| = 0 \text{ e } |y-b| = 0$$

$$\iff x = a \text{ e } y = b$$

$\Leftrightarrow \quad (x,y) = (a,b)$;

o que prova a positividade de d_1.

(ii) ¿$d_1((x,y);(a,b)) = d_1((a,b);(x,y))$?

De facto,

$$d_1((x,y);(a,b)) = |x-a| + |y-b| = |a-x| + |b-y|$$

$$= d_1((a,b);(x,y))$$

Logo, vale a simetria.

$$\text{(iii)} \quad d_1((x,y);(a,b)) \overset{?}{\leq} d_1((x,y);(m,n)) + d_1((m,n);(a,b))$$

De facto,

$$d_1((x,y);(a,b)) = |x-a| + |y-b| =$$

$$= |x-m+m-a| + |y-n+n-b|$$

$$= |(x-m)+(m-a)| + |(y-n)+(n-b)| \leq$$

desigualdade triangular do módulo

$$\leq |x-m| + |m-a| + |y-n| + |n-b| =$$

$$= \left(|x-m| + |y-n|\right) + \left(|m-a| + |n-b|\right)$$

$$= d_1((x,y);(m,n)) + d_1((m,n);(a,b))$$

Logo, vale a desigualdade triangular para d_1.

Assim, $(\mathbb{R}^2, d_1)$ é um espaço métrico.

Se definirmos uma outra métrica d em $\mathbb{R}^2$, teremos <u>outro</u> espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d)$; sendo o mesmo conj. $\mathbb{R}^2$, mas agora equipado com uma métrica diferente, ou seja, com uma forma diferente de medir distância.

Por exemplo, $(\mathbb{R}^2, d_2)$ onde

$$d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty) \quad \text{é a}$$

chamada MÉTRICA EUCLIDIANA:

$$d_2((x,y);(a,b)) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

(distância <u>EUCLIDIANA</u> entre dois pontos no plano).

Infelizmente, não há como provar que d_2 é uma métrica de $\mathbb{R}^2$ com o que dispomos no

CÁLCULO. Mas isso pode-se provar com estudo de ANÁLISE REAL.

Outra distância (métrica) usada em $\mathbb{R}^2$ é a métrica infinita $d_\infty : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty)$, dada por:

$$d_\infty((x,y);(a,b)) = \text{máx.}\{|x-a|;\ |y-b|\}.$$

Não é difícil mostrar que d_∞ é uma métrica e fica como exercício.

Naturalmente, d_1, d_2 e d_∞ se extendem para o $\mathbb{R}^m$.

No que segue, apresentaremos um conceito para generalizar a noção de intervalo que tínhamos na reta e que cumpria com os propósitos dos Cálculos 1 e 2.

<u>Def.</u>: Seja (M,d) um espaço métrico. Definimos como BOLA aberta em um ponto $a \in M$, e raio $\varepsilon > 0$, o conjunto

$$B(a,\varepsilon) = B_\varepsilon(a) = \{ x \in M : d(x,a) < \varepsilon \}.$$

A bola fechada centrada em $a \in M$ e raio $\varepsilon > 0$ é definida por.

$$B[a, \varepsilon] = \overline{B(a, \varepsilon)} = \{ x \in M : d(x, a) \leq \varepsilon \}$$

Ex! $M = \mathbb{R}^2$; $a = (0, 0)$. $X = (x, y)$

considere a métrica euclidiana d_2

$$d_2((x, y); (m, n)) = \sqrt{(x - m)^2 + (y - n)^2}$$

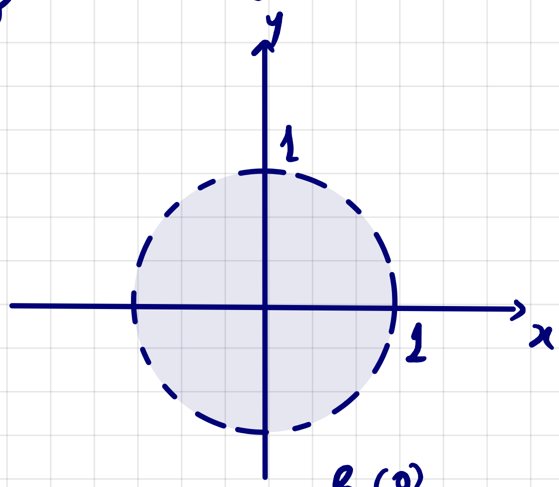
Assim:

$$B(a, 1) = B_1(a) = \{ X \in \mathbb{R}^2 : d_2(X, a) < 1 \}$$

$$= \{ X \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} < 1 \}$$

$$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \}$$

Ou seja, $B_1(a)$ é o interior de uma circunferência centrada na origem e raio unitário:



$B_1(0)$.

Em $\mathbb{R}^1$; $B_1(0)$ é o intervalo: $(-1,1)$.

E, se tivermos $(\mathbb{R}^2, d_1)$?

$$d_1((x,y);(a,b)) = |x-a| + |y-b|.$$

Como será $B_1(0)$ com essa métrica.

$$B_1(0) = \{ X \in \mathbb{R}^2 : d(X, 0) < 1 \}$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-0| + |y-0| < 1 \}$$

Ou seja, $B_1(0)$ é a região dada pela inequação

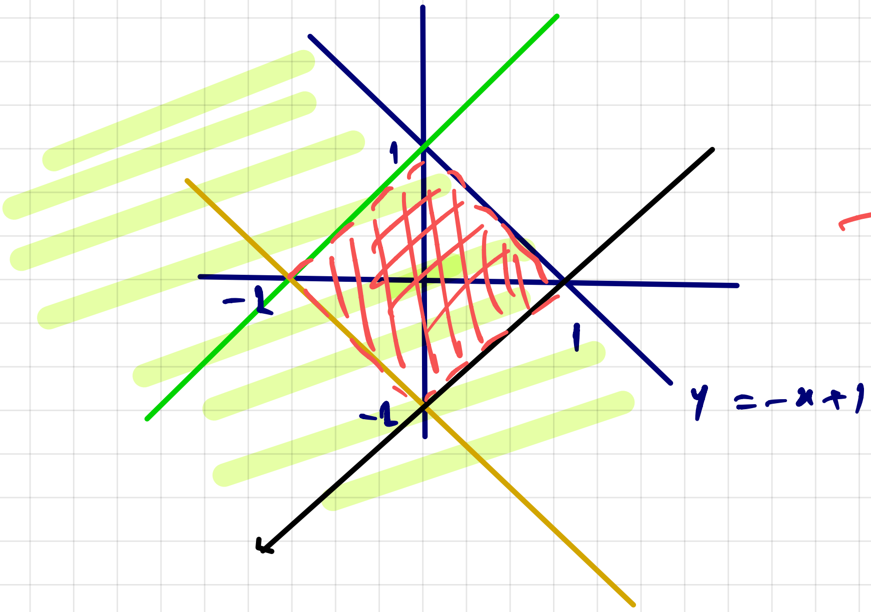
$$|x| + |y| < 1.$$

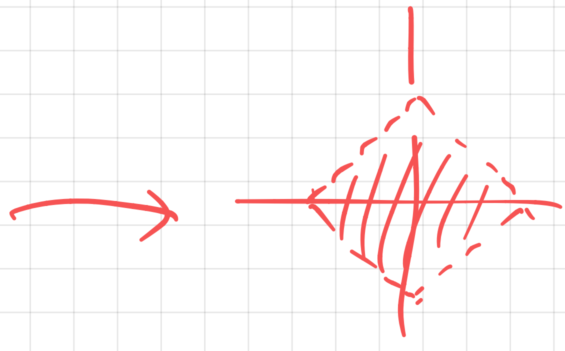
$$|x| + |y| = \begin{cases} x+y, & \text{se } x,y \geq 0 \\ x-y, & \text{se } x \geq 0 \text{ e } y < 0 \\ -x+y, & \text{se } x < 0 \text{ e } y \geq 0 \\ -x-y, & \text{se } x,y < 0 \end{cases} < 1.$$

Ou seja, transformamos o problema inicial em 4 subproblemas:

$$x+y < 1 \; ; \quad x-y < 1 \; ; \quad -x+y < 1 \; ; \quad -x-y < 1.$$

$x+y<1$: $\quad y=-x+1$.



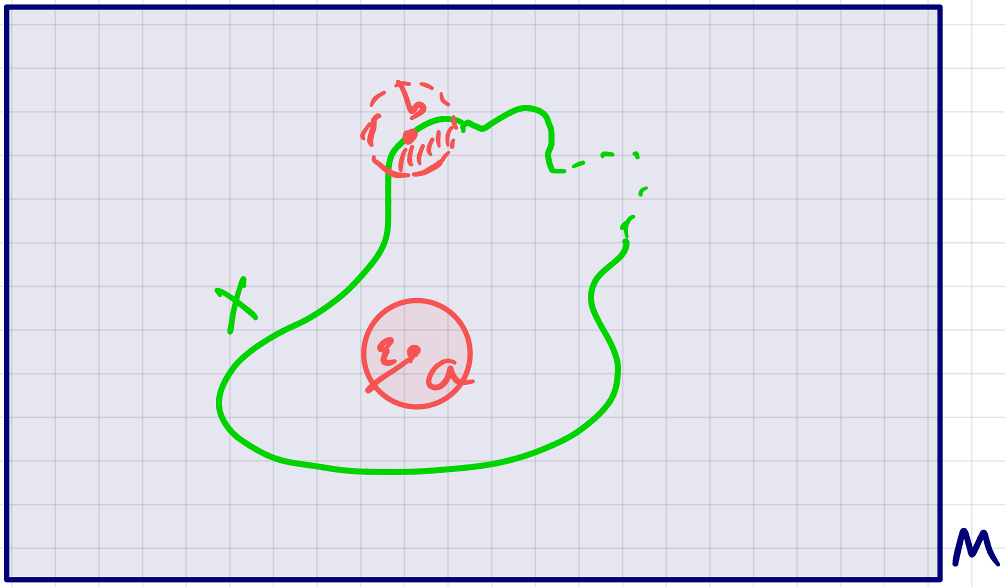


$B_1(0)$

na métrica d_1.

A BOLA DO KIKO.

Def: Dado (M,d) um espaço métrico e $X \subset M$. Dizemos que $a \in M$ é um ponto interior ao conjunto X se, e só se $\exists\, \varepsilon>0$ tal que $B_\varepsilon(a) \subset X$.



b não é ponto interior ao conj. X pois $\forall \varepsilon>0$, $B_\varepsilon(b) \not\subset X$.