CÁLCULO I

26/04/24 – AULA 06

Estudamos, na aula passada, a definição formal de limite de funções.

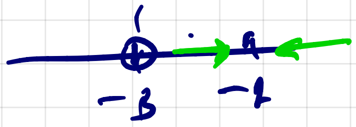
$$\lim_{x\to a} f(x) = L \overset{def.}{\iff} \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \text{ tal que, } \forall x\in D(f) \text{ tal que } 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon.$$

subentende-se que a é ponto de acumulação do domínio de f.

Vamos fazer o exercício que ficou da aula passada:

04) Prove que $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x}{x+3} = -\frac{1}{2}$

SOLUÇÃO: Note que $x\neq -3$. $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.



Dado $\varepsilon>0$, precisamos encontrar $\delta>0$, sendo que $0<\delta<2$ $(*)$, (devido ao domínio de f, pois o intervalo deve descartar o ponto $x=-3$)

tal que, $\forall x\in D(f)$:

$$0<|x-(-1)|<\delta \Longrightarrow \left|f(x)-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|<\varepsilon.$$

ou seja:

$$0<|x+1|<\delta \Longrightarrow \left|f(x)+\frac{1}{2}\right|<\varepsilon.$$

Analisando $\left|f(x)+\frac{1}{2}\right|$:

$$\left|f(x)+\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x}{x+3}+\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2x+x+3}{2(x+3)}\right|$$

$$= \left|\frac{3x+3}{2(x+3)}\right| = \left|\frac{3(x+1)}{2(x+3)}\right| = \frac{3\cdot\overbrace{|x+1|}^{<\delta}}{2|x+3|} <$$

$$< \frac{3\delta}{2|x+3|} \qquad (**)$$

Como o δ deve depender apenas do $\varepsilon>0$, devemos fazer alguma estimativa de modo a eliminar o x. Neste caso em particular, como $x+3$ está no denominador, ele deve ser majorado por algo maior, pois daí o quociente ficará menor.

Vejamos:

$$|x+3| = |2+(x+1)| \geq |2|-|x+1|$$

$$|a\pm b| \geq |a|-|b|$$

$$= 2-|x+1| > 2-\delta > 0$$

$$0<|x+1|<\delta \quad (x-1)$$
$$-|x+1|>-\delta$$

GARANTE-SE QUE É >0 DEVIDO A $(*)$: $0<\delta<2$

Ou seja, estimamos:

$$|x+3| > 2-\delta > 0.$$ Tomando os inversos, encontramos

$0 < \frac{1}{|x+3|} < \frac{1}{2-\delta}$. Assim, voltando à estimativa para $|f(x)+\frac{1}{2}|$ em (**), temos:

$$\left|f(x)+\frac{1}{2}\right| < \frac{3\delta}{2|x+3|} = \frac{3\delta}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{|x+3|}}_{<\frac{1}{2-\delta}} < \frac{3\delta}{2}\cdot\frac{1}{2-\delta}$$

$$\Rightarrow \left|f(x)+\frac{1}{2}\right| < \frac{3\delta}{4-2\delta} := \varepsilon$$

$$3\delta = \varepsilon.(4-2\delta)$$
$$3\delta = 4\varepsilon - 2\delta\varepsilon$$
$$3\delta + 2\delta.\varepsilon = 4\varepsilon$$
$$\delta(3+2\varepsilon) = 4\varepsilon$$
$$\delta = \frac{4\varepsilon}{3+2\varepsilon}$$

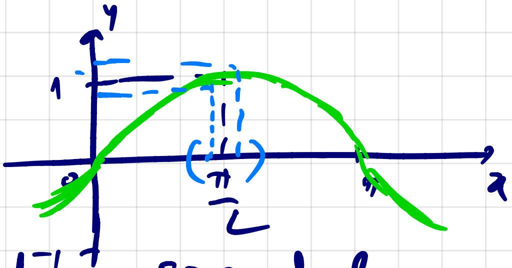
Assim, basta tomar

$$\delta = \frac{4\varepsilon}{3+2\varepsilon}\ ; \quad 0<\delta<2,$$

o que prova o limite desejado.

□

05) Prove que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x = 1$.



Solução: Dado $\varepsilon>0$, precisamos encontrar $\delta>0$, tal que, $\forall x\in\mathbb{R}$ tal que $0<|x-\frac{\pi}{2}|<\delta$, implique em $|\operatorname{sen} x - 1|<\varepsilon$.

Analisando $|\text{sen}\, x - 1|$:

$$|\text{sen}\, x - 1| = \left|\text{sen}\, x - \text{sen}\frac{\pi}{2}\right|$$

Aqui precisamos recordar da fórmula da Trigonometria:

$$\text{sen}\, p - \text{sen}\, q = 2 . \text{sen}\frac{p-q}{2} . \cos\frac{p+q}{2} . \qquad (*)$$

Assim:

$$|\text{sen}\, x - 1| = \left|\text{sen}\, x - \text{sen}\frac{\pi}{2}\right| = \left|2 . \text{sen}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2} . \cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right| =$$

$$= 2 . \left|\text{sen}\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right| . \underbrace{\left|\cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right|}_{\leq 1} \leq$$

$$\leq 2 . \left|\text{sen}\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right| 1 . \leq \cancel{2} . \left|\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cancel{2}}\right| = \left|x - \frac{\pi}{2}\right| < \delta := \varepsilon$$

$|\cos \alpha| \leq 1.$

$|\text{sen}\, x| \leq |x|, \ \forall x$:

Ou seja, basta tomar $\delta = \varepsilon$.

$\square$

$(*)$ $\text{sen}(\overbrace{a+b}^{p}) = \text{sen}\, a . \cancel{\cos b} + \text{sen}\, b . \cos a$

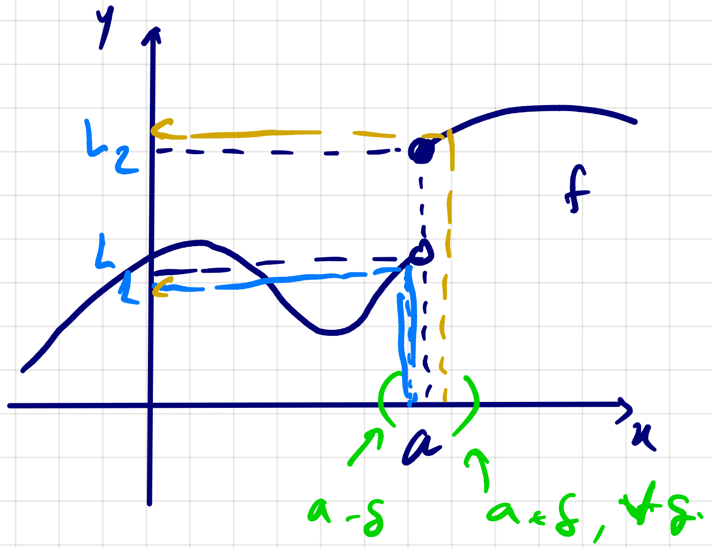
$-$ $\text{sen}\,(\underbrace{a-b}_{q}) = \text{sen}\, a . \cancel{\cos b} - \text{sen}\, b . \cos a$

$\text{sen}(\underbrace{a+b}_{p}) - \text{sen}(\underbrace{a-b}_{q}) = 2 . \text{sen}\, b . \cos a$

$\begin{cases} a+b = p \\ a-b = q \end{cases} \rightsquigarrow a = \dfrac{p+q}{2} ; \ b = \dfrac{p-q}{2}$

$\Rightarrow \text{sen}\, p - \text{sen}\, q = 2 . \text{sen}\dfrac{p-q}{2} . \cos\dfrac{p+q}{2}$

Um contra-exemplo, ou seja, quando não existe o limite: considere a função f cujo gráfico é apresentado abaixo.



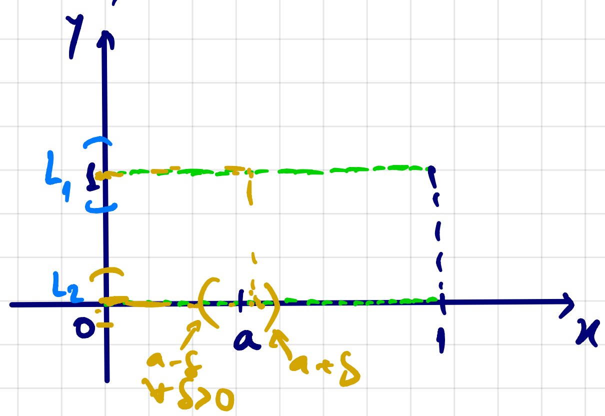
O dizer sobre $\lim_{x\to a} f(x) = ?$ pode ser L_1 ou L_2, com $L_1 \neq L_2$.

Logo, $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$

Ex.: Seja $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases},$$

conhecida como FUNÇÃO DE DIRICHLET.



De fato, $\forall a \in [0,1]$, temos que, dado $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ $\forall \delta > 0$, existe $x_0 \in [0,1]$ tal que

$0 < |x_0 - a| < \delta$, mas

$$|f(x_0) - 1| = |0-1| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

e

$\exists\, x_1 \in [0,1]$ tal que

$0 < |x_1 - a| < \delta$, mas

$|f(x_1) - 0| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$

(isso se dá devido à densidade de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ em $\mathbb{R}$)

↳ $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, pois, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.

O mesmo para $\mathbb{I}$.

PROPOSIÇÃO: (UNICIDADE DO LIMITE) O limite de uma função se existir, é único.

DEMONSTR.: Seja $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$

Vamos mostrar que $L_1 = L_2$.

Por absurdo, suponha que $L_1 \neq L_2$.

Isto posto, considere $\varepsilon = |L_2 - L_1| > 0$.

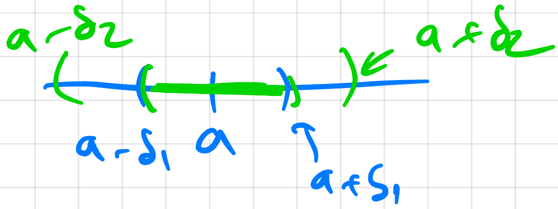
Assim, para tal $\varepsilon > 0$, temos:

- como $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$, então, $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que,

$\forall x \in D(f)$: $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(*)$

- como $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, então, $\exists\, \delta_2 > 0$ tal que,

$\forall x \in D(f)$: $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(**)$



Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Assim, valem (*) e (**). Com isso, teremos; $\forall x$: $0<|x-a|<\delta$ teremos:

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - \underline{f(x) + f(x)} - L_2| \le$$

$$\le \underbrace{|L_1 - f(x)|}_{\substack{<\frac{\varepsilon}{2} \\ \text{por } (*)}} + \underbrace{|f(x) - L_2|}_{\substack{<\frac{\varepsilon}{2}, \\ \text{por } (*)}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ou seja, mostramos que, nestas condições, teremos:

$$\varepsilon = |L_1 - L_2| < \varepsilon. \Rightarrow \varepsilon < \varepsilon.$$

Absurdo!

Portanto, $L_1 = L_2$.

$\square$