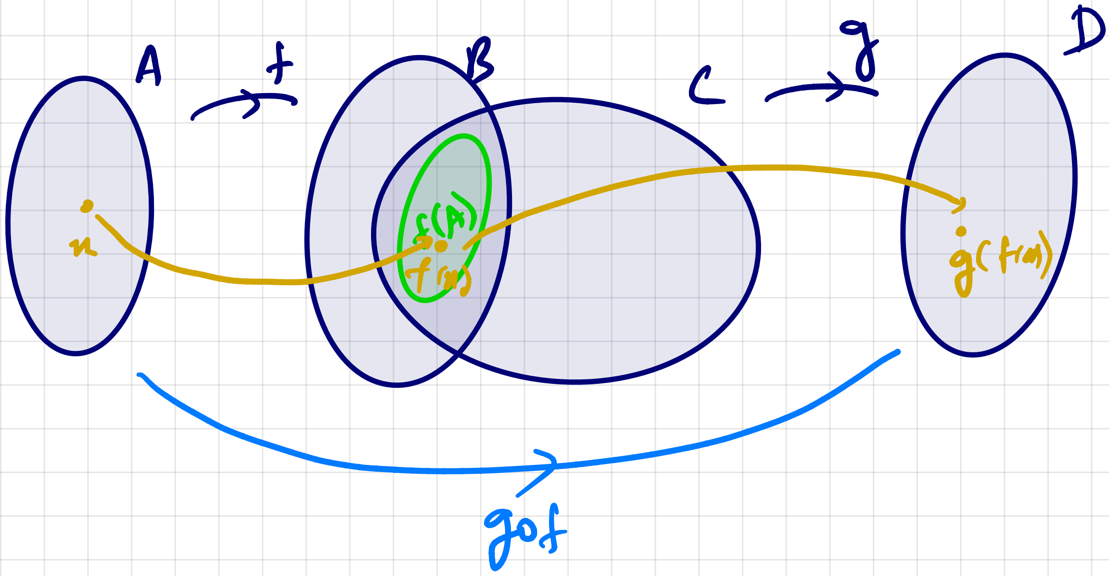
CÁLCULO 1.

30/04/24 - AULA 04

COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES:

Def.: Sejam $f: A \to B$, $g: C \to D$ funções com $f(A) \subset C$. Definimos a composta $g \circ f: A \to D$ por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



Ex.: 01) $f: [-1, +\infty) \to [0, +\infty)$;

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

$$g: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$$

$$g(x) = x^2 + x$$

Verifiquemos se $\exists\, g \circ f$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$\mathrm{Im}(f) = ?$ (isto para verificar se $f([-1, +\infty)) \subset (1, +\infty)$)

Note que:

$f(x) = \sqrt{1+x}$. Além disso:

$x \in [-1, +\infty)$. Logo, temos que

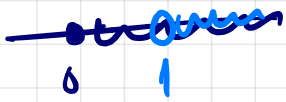
$x \geq -1$. Somando 1, obtemos:

$$1 + x \geq 1 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow 1 + x \geq 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{1+x} \geq \sqrt{0} = 0$$
$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{1+x} \geq 0$$
$$\Rightarrow Im(f) = [0, +\infty)$$

isto tudo está sendo feito para obtermos a expressão que define f, que será sua imagem

Logo, notamos que

$$Im(f) = [0, +\infty) \not\subset (1, +\infty)$$



Logo, não existe $g \circ f$.

02) $f: [-1, +\infty) \to [0, +\infty)$;

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$g(x) = x^2 + x$$

NESTE EXEMPLO, f É A MESMA NO EXEMPLO ANTERIOR, MAS A g É OUTRA FUNÇÃO, POIS MUDAMOS O SEU DOMÍNIO

Neste caso existirá $g \circ f$, pois

$$\operatorname{Im}(f) = [0, +\infty) \subset \mathbb{R} = D(g)$$

Então, $\exists\, g\circ f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$;

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{1+x})$$

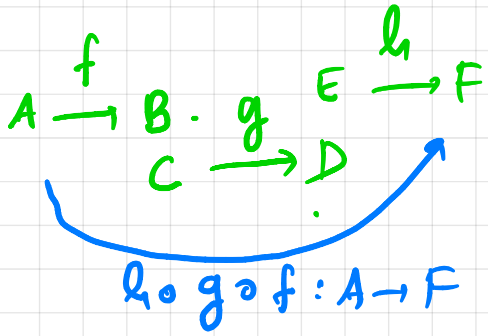
$$= (\sqrt{1+x})^2 + \sqrt{1+x} = 1 + x + \sqrt{1+x} .$$

PROPOSIÇÃO: A composição de funções é associativa.

DEMONSTR.: Sejam $f : A \to B$; $g : C \to D$ e $h : E \to F$ funções tais que $f(A) \subset C$ e $g(C) \subset E$.

Vamos mostrar que

$$h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$$



De fato, $\forall x \in A$, tem-se:

$$(h\circ(\underbrace{g\circ f}_{u}))(x) = (h\circ u)(x) = h(u(x)) =$$

$$h((g\circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (\underbrace{h\circ g}_{v})(f(x))$$

$$= v(f(x)) = (v\circ f)(x) = ((h\circ g)\circ f)(x) \quad , \forall x$$

$$\Rightarrow h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f .$$

$\square$

Obs.: A composição de funções não é comutativa.

Ou seja, em geral, $g \circ f \neq f \circ g$.

Aliás, pode acontecer em ser possível montar a composição numa ordem, e na ordem contrária não se tenha sequer sentido em montar a composição.

Ex.: $f: \mathbb{R} \to [0,+\infty)$, $f(x) = x^2$

$g: [-1,1] \to \mathbb{R}$; $g(x) = x+1$.

Neste caso, temos:

$f(x) = x^2 \geq 0$. $Im(f) = [0,+\infty)$; mas

$Im(f) \not\subset [-1,1]$; logo,

não é possível montar $g \circ f$.

Porém:

$g(x) = x+1$; $\forall x \in [-1,1]$;

$-1 \leq x \leq 1$.

$0 \leq \underbrace{x+1}_{g(x)} \leq 2 \Rightarrow Im(g) = [0,2]$

E, $Im(g) = [0,2] \subset \mathbb{R} = D(f)$.

Então, $\exists\, f \circ g : [-1,1] \to [0,+\infty)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$

Neste caso, $(f\circ g)(x) = (x+1)^2$ e

$g\circ f$ sequer existe.

Def.: Dizemos que uma função $f: A \to B$ é injetiva (ou injetora) se, e somente se, $\forall\, x, y \in A$:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

$$\left[\begin{array}{l} P \Rightarrow Q. \\ \sim Q \Rightarrow \sim P \end{array}\right]$$

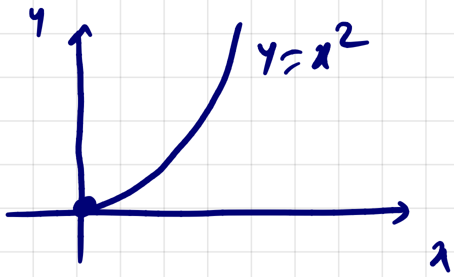
Ou, de forma transpositiva,

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Em palavras, temos que f é injetiva se domínios diferentes tiverem imagens também diferentes.

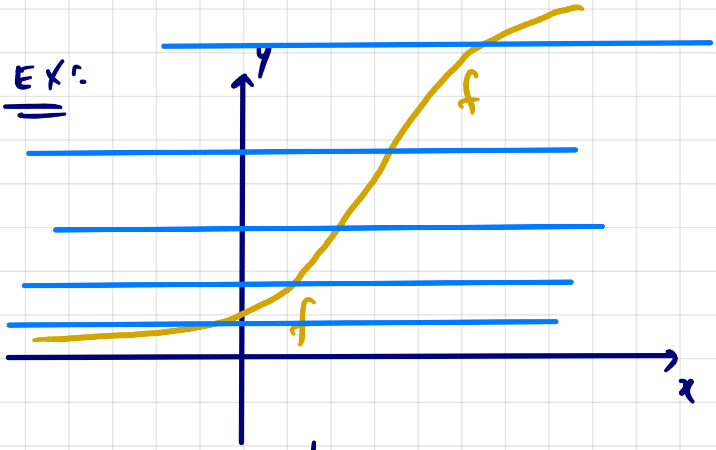
Ex.: $f: [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$.

f é injetiva, pois: se $a, b \geq 0$; $a \neq b$, então $a^2 \neq b^2$, ou seja, $f(a) \neq f(b)$.

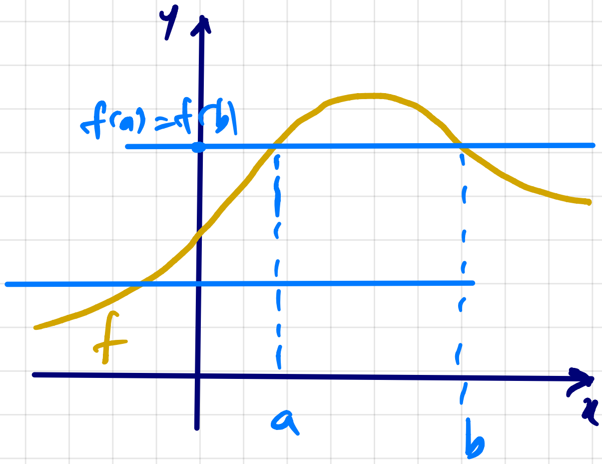


Geometricamente, podemos observar se f é injetiva ou não se, olhando o seu gráfico, se qualquer reta horizontal interceptar o seu gráfico em apenas um ponto caracterizará injetividade; do contrário não.

EX:



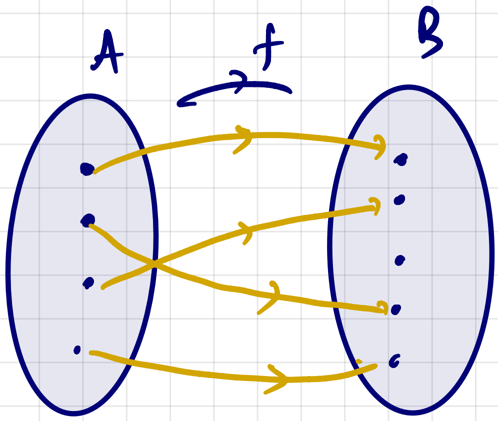
f é injetiva.



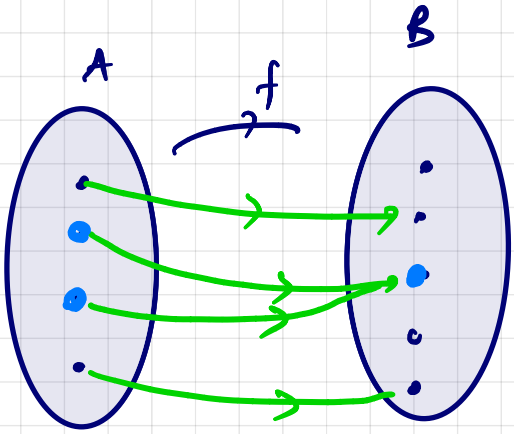
$a \neq b$, mas $f(a) = f(b)$

f não é injetiva.

EM DIAGRAMAS:



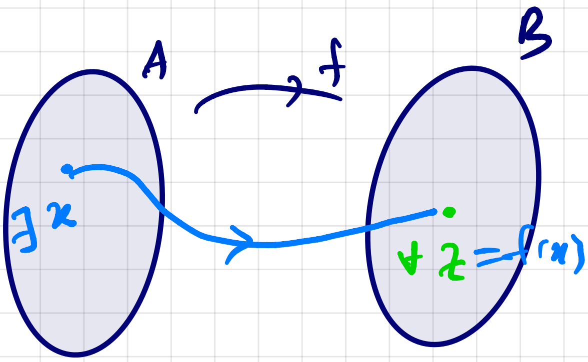
f injetiva.



f não é injetiva.

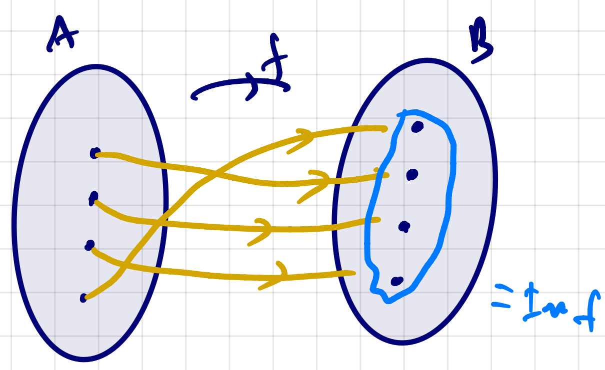
Defn Dizemos que uma função $f: A \to B$ é sobrejetiva (ou sobrejetora) se, e somente se, $f(A) = Im(f) = B$.

Ou seja, $f: A \to B$ é sobrejetiva se, e só se, $\forall z \in B, \exists x \in A$ tal que $f(x) = z$.

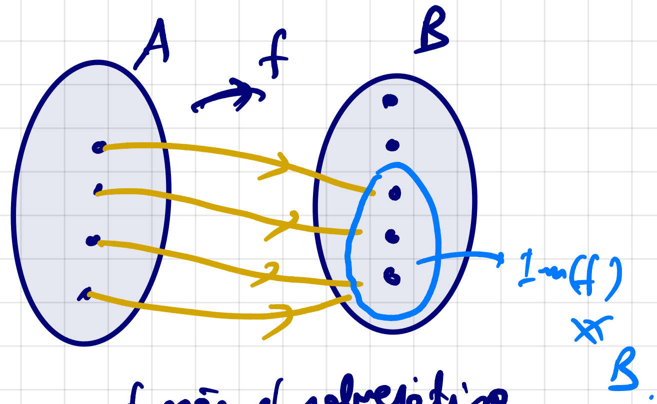


OU SEJA O CONJUNTO A SOBREPÕE TODO O CONJUNTO B, MEDIANTE f.

EM DIAGRAMAS:



f é sobrejetiva



f não é sobrejetiva.

<u>Ex.:</u> 01) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

Note que, $\underbrace{x^2}_{f(x)} \geq 0$

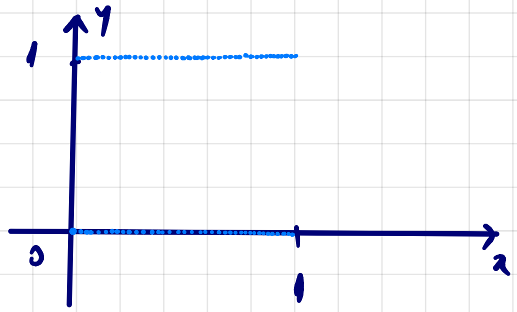
Logo, $Im(f) = [0, +\infty) \neq \mathbb{R} = CD(f)$.

Portanto, f não é sobrejetiva.

02) $f: [0,1] \to \{0,1\}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$ (FUNÇÃO DE DIRICHLET)

Note que sequer é possível construir o gráfico de f.
Uma ideia do gráfico seria:



Não é possível construir o gráfico devido à DENSIDADE(*) dos racionais e dos irracionais em $\mathbb{R}$.

No que diz respeito à sobrejetividade, tem-se que a função f de DIRICHLET é sobrejetiva, pois só existem dois elementos no contradomínio, 1 e 0:

$\forall a \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $f(a) = 1$,

$\forall b \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, $f(b) = 0$

Porém, tal f não é injetiva.

Def: Dizemos que uma função $f: A \to B$ é bijetiva (ou bijetora) se, e somente se, for injetiva e sobrejetiva.

Ou ainda, $f: A \to B$ é bijetiva se, e somente se,

$\forall z \in B$, $\underbrace{\exists!}_{\text{existe um único}}\, x \in A$ tal que $f(x) = z$.

(*) Def.: O conj. $\mathbb{Q}$ dos racionais é dito DENSO em $\mathbb{R}$ pois, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ tal que

$x < q < y$ [ou seja, entre dois números reais quaisquer, existem números racionais]

Do mesmo modo, o conj. $\mathbb{I}$ dos números irracionais é denso em $\mathbb{R}$.

PROPOSIÇÃO: A composição de funções não estraga injetividade, sobrejetividade e bijetividade. Ou seja, a composição de funções injetivas resulta em uma função injetiva, et cetera.

DEMONSTR.: Sejam $f: A \to B$ e $g: C \longrightarrow D$ funções injetivas, com $f(A) \subset C$.

Vamos mostrar que $g \circ f : A \to D$ é também injetiva.

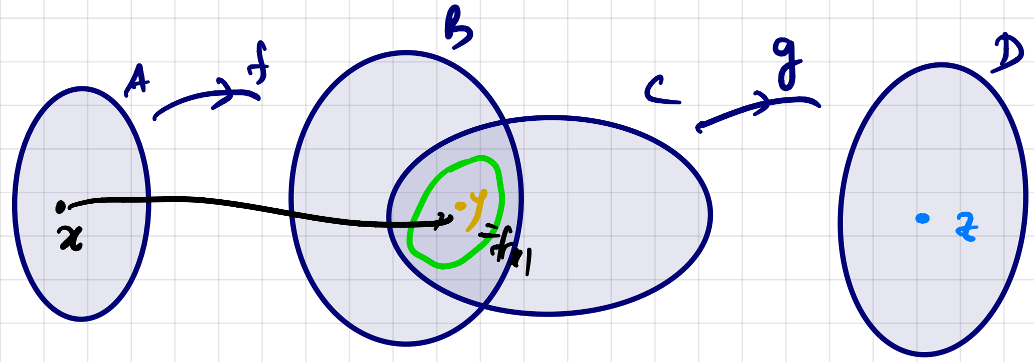
De fato, $\forall\, x, y \in A$, temos:

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \xRightarrow{\text{g é injetiva}}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(y) \xRightarrow{\text{f é injetiva}} x = y$$

Ou seja, $g \circ f$ é injetiva.

Suponha agora $f: A \to B$, $g: C \longrightarrow D$ sobrejetivas, com $f(A) \subset C$.



Vamos mostrar que $g \circ f : A \to D$ é sobrejetiva.

Seja $z \in D$ um ponto qualquer do conj. D.

Como g é sobrejetiva, por hipótese, segue que $\exists\, y \in B$ tal que $g(y) = z$.

Como f também é sobrejetiva, para este $y \in B$, tem-se que $\exists\, x \in A$ tal $f(x) = y$.

Portanto,

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Ou seja, $g \circ f$ é sobrejetiva.

Por fim, sendo f e g bijetivas, em particular são injetivas e em particular são sobrejetivas. Donde segue o resultado pelo feito acima, devido às composições separadamente demonstradas.

$\blacksquare$