CÁLCULO I

17/04/24 – AULA 02

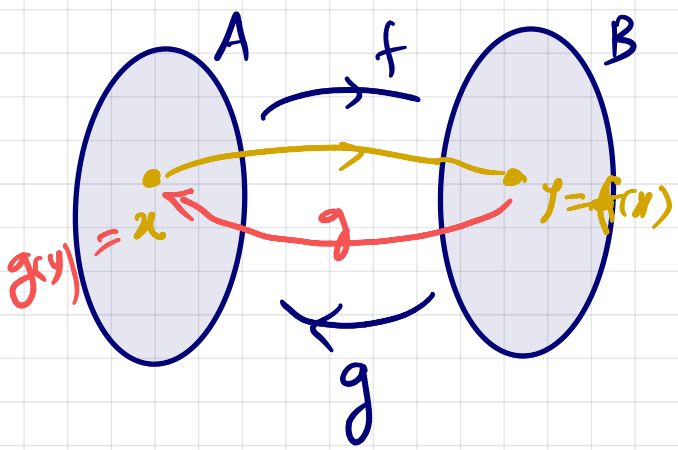
FUNÇÃO INVERSA:

Dada $f: A \to B$ uma função, ou seja, uma aplicação f, tal que $\forall x \in A$, $\exists y \in B$ tal que $y = f(x)$. Além disso, pela def. de função, todo $x \in A$ é levado, de maneira ÚNICA, para algum $y \in B$.

$$f: A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto y$$

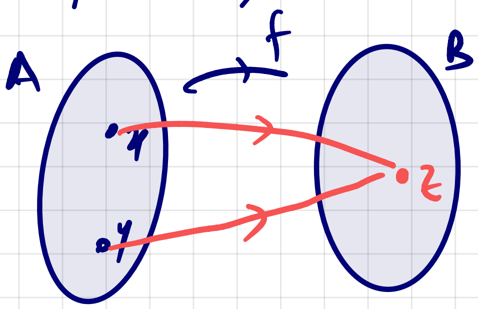
Perguntamos, quando é possível considerar outra função $g: B \to A$ que "faça o caminho de volta", ou seja, que, a partir do $y \in B$, retorne a $x \in A$, via a regra g?

Quando isso for possível, dizemos que f é inversível, e, neste caso, $g: B \to A$ é chamada de função inversa da $f: A \to B$.



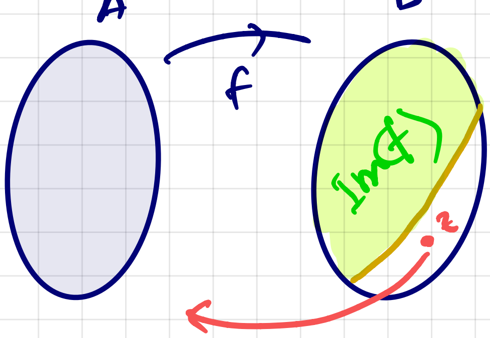
Para que exista a inversa $g: B \to A$ devemos observar que $f: A \to B$ deve ser:

(i) <u>injetiva</u>; pois se não o for, então, existem $x, y \in A$, $x \neq y$, mas $f(x) = f(y) = z$.



Então, a que seria $g: B \to A$ seria tal que $g(z) = x$ e $g(z) = y$, $x \neq y$, o que viola a def. de função.

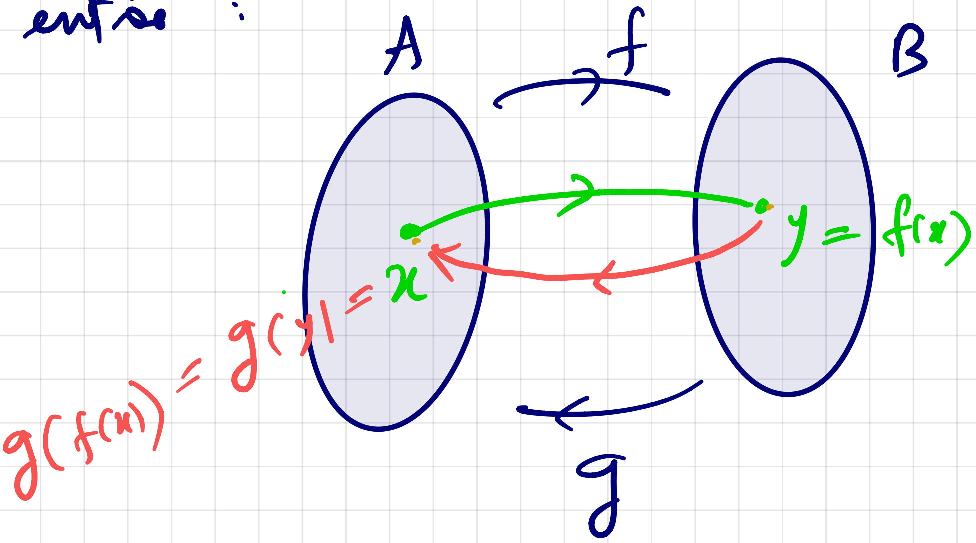
(ii) <u>sobrejetiva</u>; pois se não o for, então teríamos que, existiria o conjunto $W = B \setminus Im(f) \neq \emptyset$, e disso, a "candidata" a inversa $g: B \to A$ seria tal que, qualquer $z \in W$, que pertence ao domínio de g, não teria nenhuma imagem, o que contradiz a def. de função.



$\nexists\, g(z)$. Absurdo!

Portanto, dada $f: A \to B$, para existir a inversa $g: B \to A$, devemos ter que f é injetiva e sobrejetiva; i.e., f deve ser bijetiva.

Assim, assumindo $f: A \to B$ bijetiva; então:



$$(g \circ f)(x) = x$$

$$f(g(y)) = f(x) = y$$

$$(f \circ g)(y) = y$$

Ou seja; $f: A \to B$ é inversível $\iff$ f for bijetiva $\iff$ $\exists\, g: B \to A$ tal que

$$g \circ f : A \to A,$$
$$(g \circ f)(x) = x = id_A(x)$$

e

$$f \circ g : B \to B$$
$$(f \circ g)(y) = y = id_B(y)$$

<u>NOTAÇÃO:</u> Se $f: A \to B$ é inversível, então, sua inversa é denotada por $f^{-1}: B \to A$.

Ou seja, estamos denotando $g = f^{-1}$.

Um fato importante que provaremos é a unicidade da inversa (quando existir).

PROPOSIÇÃO: Seja $f: A \to B$ uma função inversível. Então a inversa é única.

DEMONSTR.: Sejam $g, h: B \to A$ inversas de f. Mostraremos que $g = h$.

De fato, basta observar que, nestas condições, temos:

$$g \circ f : A \to A \; ; \; g \circ f = id_A \; . \quad \bullet\bullet$$

$$f \circ g : B \to B \; ; \; f \circ g = id_B$$

$$h \circ f : A \to A \; ; \; h \circ f = id_A$$

$$f \circ h : B \to B \; ; \; f \circ h = id_B \quad \bullet$$

Assim:

$$g \underset{\bullet}{=} g \circ id_B = g \circ (f \circ h) \underset{\text{ASSOC.}}{=} (g \circ f) \circ h =$$

$$\underset{\bullet\bullet}{=} id_A \circ h = h. \quad \Longrightarrow g = h.$$

$\square$

Vejamos exemplos de obtenção de inversa.

01) $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$; $f(x) = x^2$.

f é inversível? Se sim, qual é f^{-1}?

Solução: f é injetiva pois

$x_1, x_2 \geq 0$; $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^2 \neq x_2^2$

f é sobrejetiva, pois

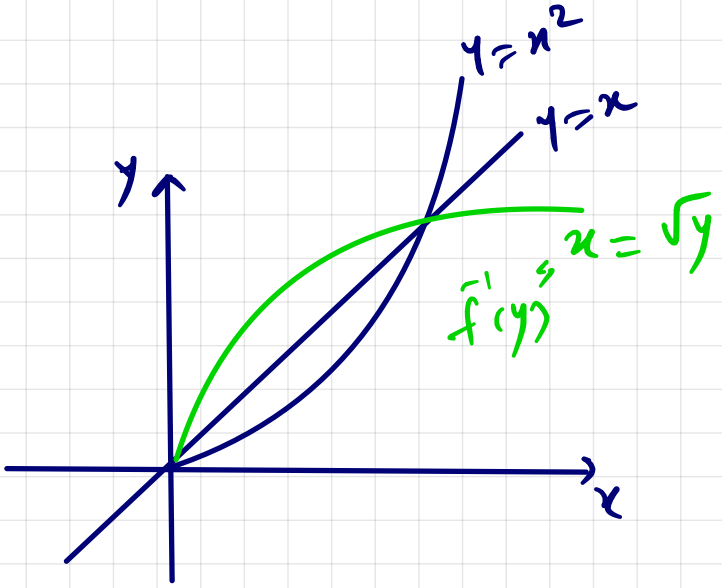
$f(x) = x^2 \geq 0 \Rightarrow Im(f) = [0, +\infty) = CD(f)$.

Logo, f é bijetiva. Sendo bijetiva, existe inversa $f^{-1}: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$.

$x = f^{-1}(y)$, onde:

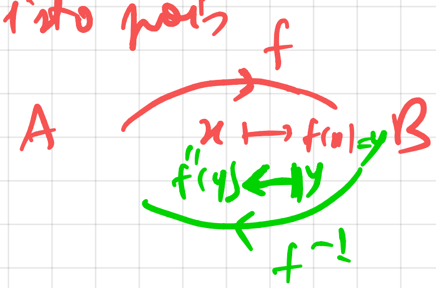
$y = x^2 \Rightarrow \sqrt{y} = x = f^{-1}(y)$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y}$



O GRÁFICO DE f^{-1} É O GRÁFICO DE f, MAS NO SENTIDO CONTRÁRIO DOS EIXOS, POR ISSO, O GRÁFICO DE f E f^{-1} SÃO ESPELHAMENTOS DE UM E DO OUTRO EM RELAÇÃO À RETA $y = x$.

isto pois



02) $f: [-1, +\infty) \longrightarrow [1, +\infty)$

$$f(x) = 1 + \sqrt{1+x}$$

é inversível? Se sim, qual é f^{-1}?

AF01: f é injetiva. De fato, $\forall a, b \in [-1, +\infty)$,

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \cancel{1} + \sqrt{1+a} = \cancel{1} + \sqrt{1+b}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{1+a}\right)^2 = \left(\sqrt{1+b}\right)^2 \Rightarrow \cancel{1} + a = \cancel{1} + b$$

$$\Rightarrow a = b.$$

AF-02: f é sobrejetiva. De fato, $\forall z \in [1, +\infty)$,

temos que $\exists\, x \in [-1, +\infty)$ tal que $f(x) = z$.

De fato, basta tomar(*) $x = (z-1)^2 - 1$:

$$f(x) = f\left((z-1)^2 - 1\right) = 1 + \sqrt{\cancel{1} + (z-1)^2 - \cancel{1}}$$

$$= 1 + \sqrt{(z-1)^2} = \cancel{1} + z - \cancel{1} = z$$

(*) Rascunho:

$f(x) = z \iff 1 + \sqrt{1+x} = z$

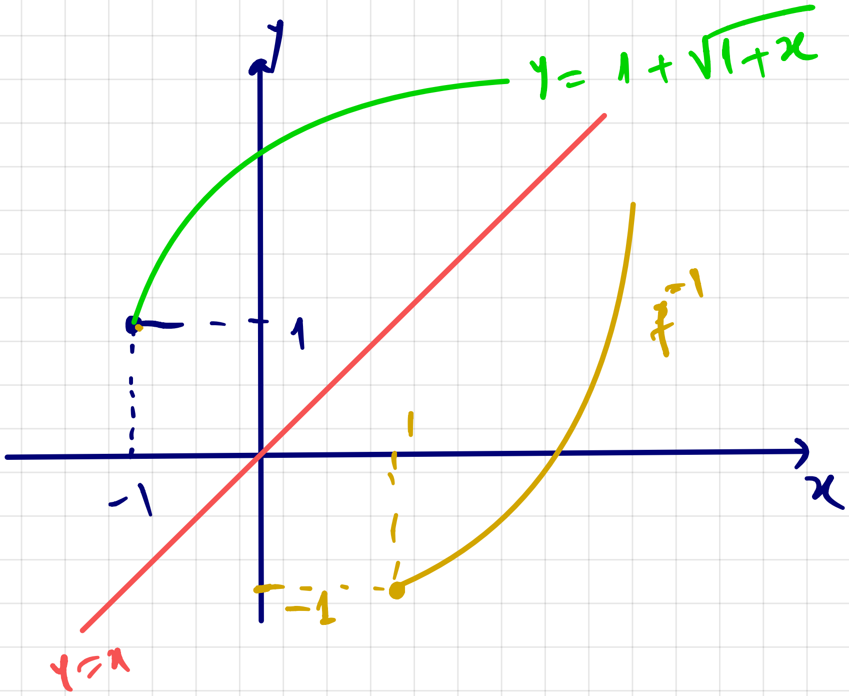
$\iff \sqrt{1+x} = z - 1$

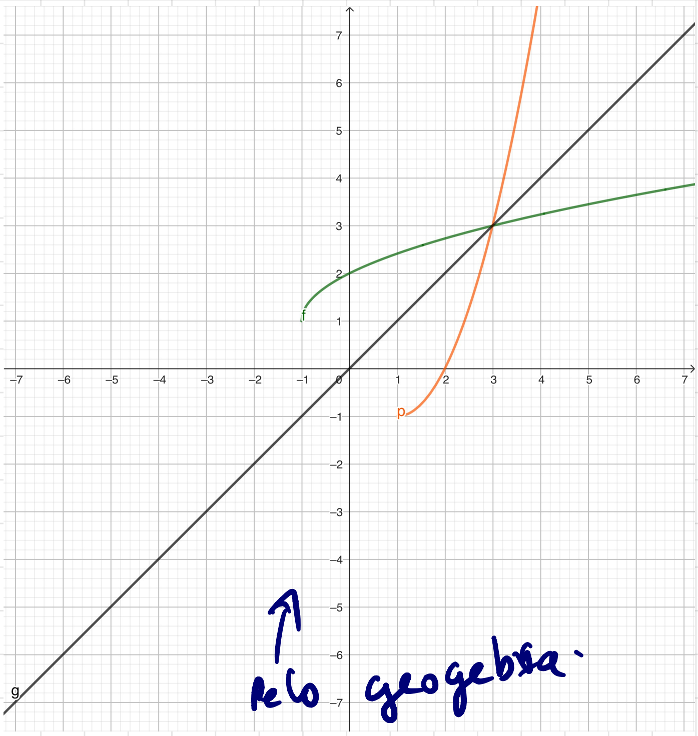
$\iff 1 + x = (z-1)^2$

$\iff x = (z-1)^2 - 1$

Pelas AF-01 e 02 segue que $f:[-1,+\infty)\to[2,+\infty)$ é inversível. Logo, $\exists\, f^{-1}:[2,+\infty)\to[-1,+\infty)$,

$$x = f^{-1}(y) = (y-1)^2 - 1.$$





↑ Pelo geogebra.

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS:

Def: Definimos a função seno hiperbólico por

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

A função cosseno hiperbólico é dada por

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

onde $e \simeq 2{,}71828\ldots$ é o NÚMERO DE EULER (IRRACIONAL)

Ou seja, as funções hiperbólicas são combinações de exponenciais.

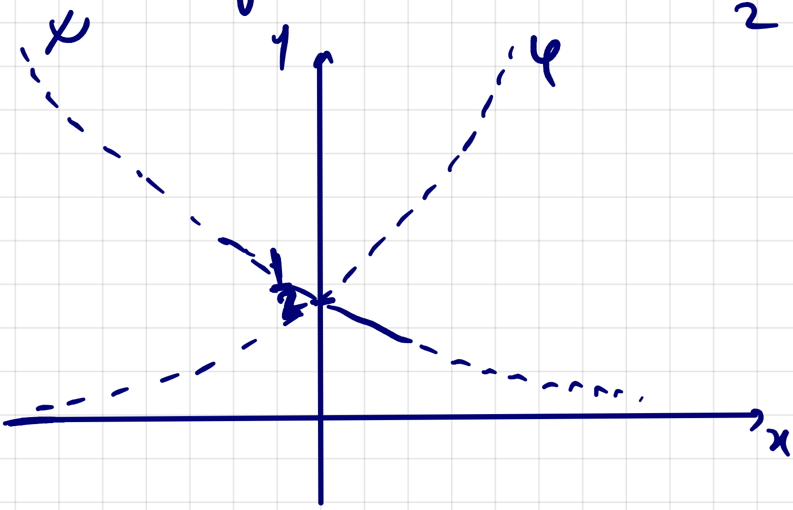
GRÁFICOS: Escreva $\varphi(x) = \frac{e^x}{2}$ e $\psi(x) = \frac{e^{-x}}{2}$.

Ou seja, $\varphi(x) = \frac{1}{2}e^x$; $\psi(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}\right)^x$.

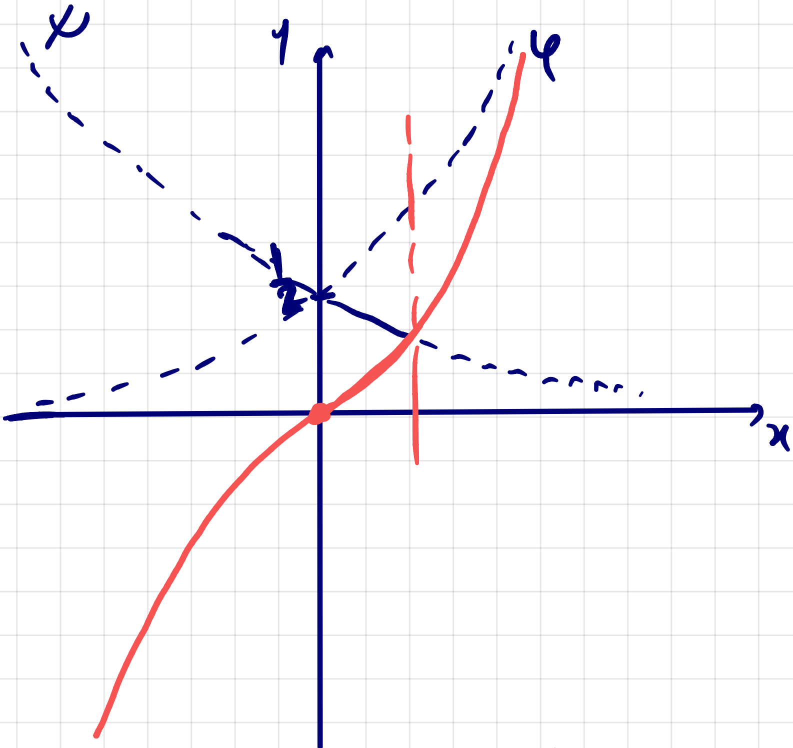
Logo,

$$f(x) = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \varphi(x) - \psi(x)$$

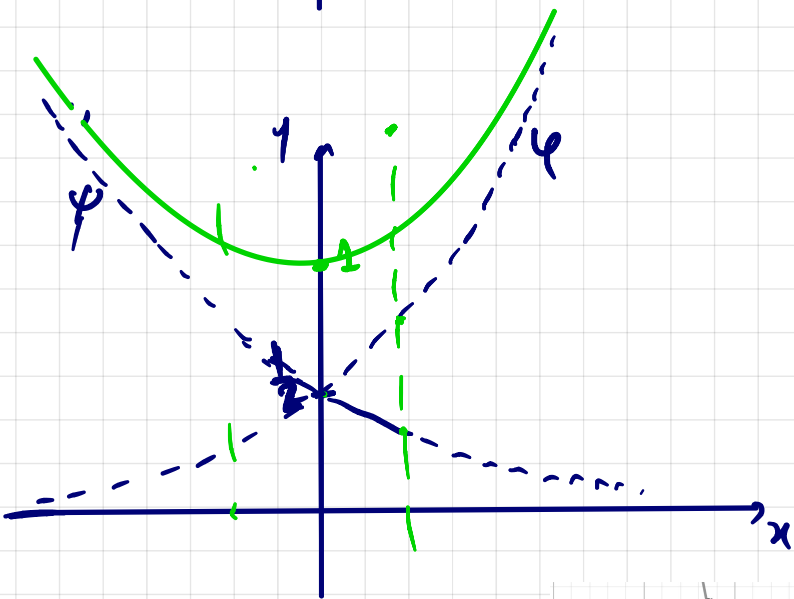
$$g(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \varphi(x) + \psi(x)$$



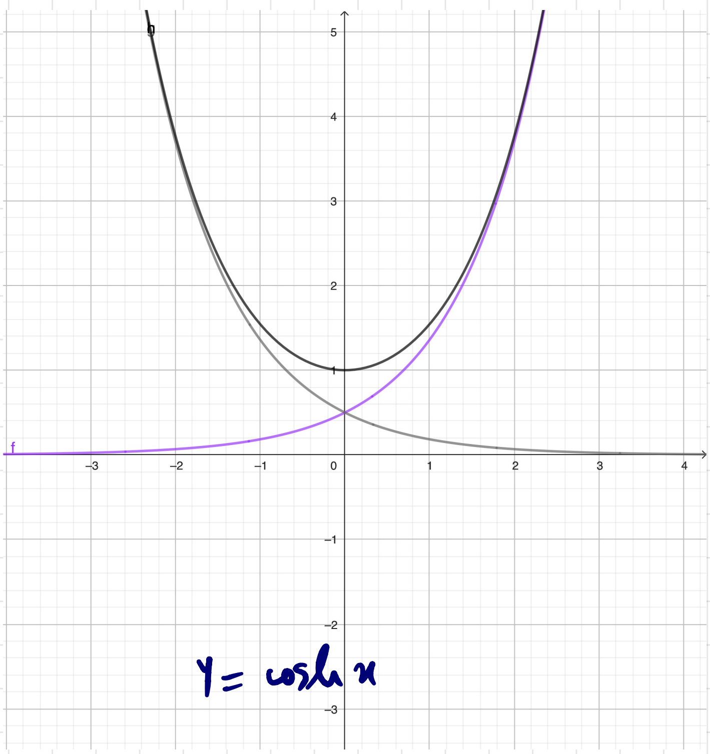
Dessa forma, temos:

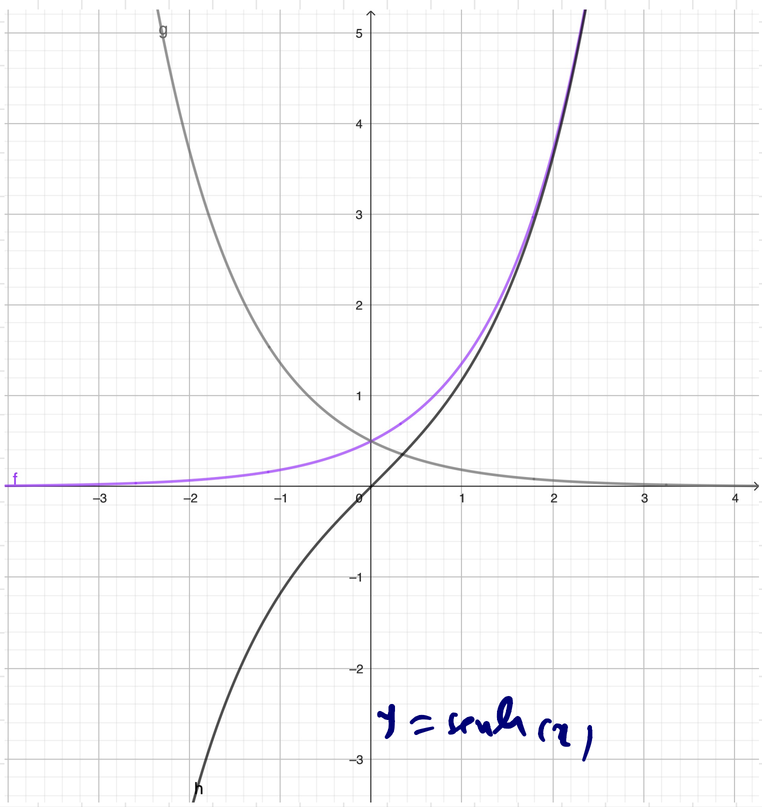


$\operatorname{senh}(x) = \varphi(x) - \psi(x)$



$\cosh(x) = \varphi(x) + \psi(x)$





Valem fórmulas similares às da Trigonometria.
Por exemplo:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1.$$

De fato:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \cdots = 1.$$

exercício.