Vimos todas as funções hiperbólicas diretas na aula passada e encerramos apresentando algumas fórmulas similares às da Trigonometria. Por exemplo:

$$\operatorname{senh}(a+b) = \operatorname{senh} a \cdot \cosh b + \operatorname{senh} b \cdot \cosh a$$

Todas as demais fórmulas, correspondentes às da Trigonometria, ficam como exercício.

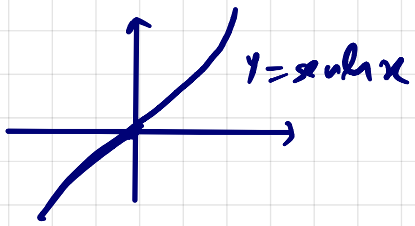
FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS:

Como todas as funções hiperbólicas são dadas em termos de exponenciais, é de se esperar que as "hiperbólicas inversas" sejam dadas em termos de logaritmos. Vejamos:

Def.: Definimos a função arco seno hiperbólico por: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arcsenh} x$ tal que

$$y = \operatorname{arcsenh} x \iff x = \operatorname{senh} y$$

(De fato, tem sentido pois o seno hiperbólico é bijetivo)



De $y = \text{arcsenh}\, x \iff x = \text{senh}\, y$,

vamos isolar o y.

$$x = \text{senh}\, y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^y - \frac{1}{e^y}}{2}$$

$$2x = e^y - \frac{1}{e^y} \qquad \times e^y$$

$$2x \cdot e^y = e^{2y} - 1 \iff e^{2y} - 2x \cdot e^y - 1 = 0$$

Escreva $\boxed{e^y = w}$. Então:

$$w^2 - 2x \cdot w - 1 = 0$$

$$w = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2 \cdot 1} = \frac{2x \pm \sqrt{4(x^2+1)}}{2}$$

$$w = \frac{x \pm \sqrt{x^2+1}}{2}$$

$w = x + \sqrt{x^2+1}$

$w = x - \sqrt{x^2+1}$

Então, como $e^y = w$, teremos:

- $e^y = x + \sqrt{x^2+1} \implies \ln e^y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$$\implies \boxed{y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}$$

ou:

- $e^y = x - \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \ln e^y = \ln\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)$

$$y = \ln\left(\underbrace{x - \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{>|x|}}_{<0}\right)$$

MAS, $\nexists$ logaritmo de número negativo (em $\mathbb{R}$)

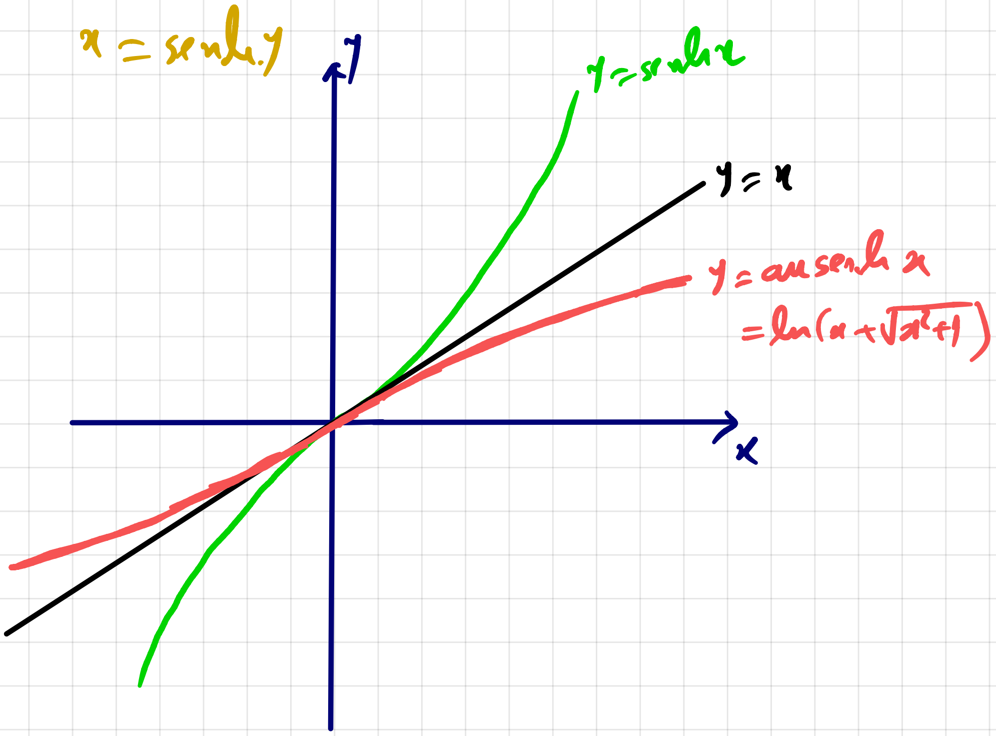
Portanto, a única solução admissível ao problema é $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$;

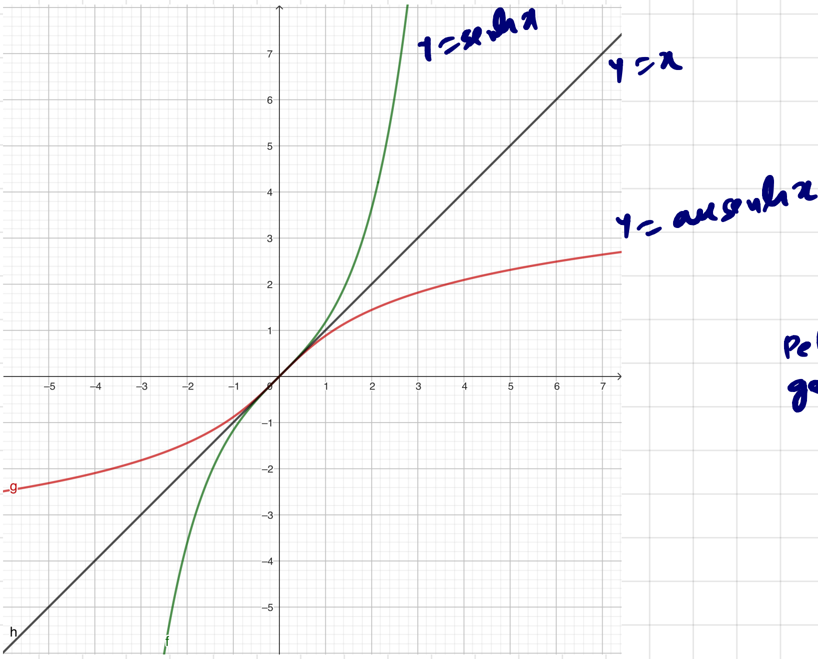
Ou seja, acabamos de mostrar que

$$y = \text{arcsenh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \text{senh}\, y$$



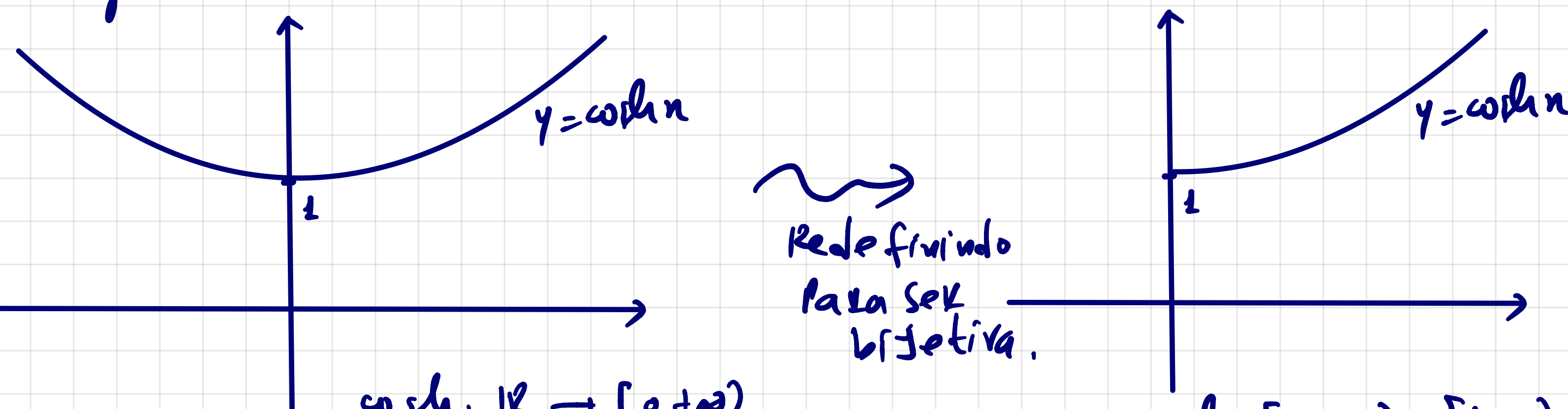


Pelo geogebra.

Note que $\text{arcsenh}(0) = 0$:

$$\text{arcsenh}(0) = \ln\left(0 + \sqrt{0^2+1}\right) = \ln 1 = 0.$$

FUNÇÃO ARCO COSSENO HIPERBÓLICO: Ao contrário da função arcsenh, para definir a função inversa ao cosseno hiperbólico, precisamos efetuar restrições na mesma de modo a tornar-se bijetiva.



$\cosh: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$

$\cosh: [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ (bijeção)

Assim, dada $f: [0, +\infty) \to [1, +\infty)$, $f(x) = \cosh x$, definimos $g: [1, +\infty) \to [0, +\infty)$,

$$y = g(x) = \text{arccosh}\, x \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} x = \cosh y$$

Ou seja; $x = \cosh y \Leftrightarrow x = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$

$$\Leftrightarrow 2x = e^y + e^{-y} \Leftrightarrow 2x = e^y + \frac{1}{e^y} \qquad \times(e^y > 0)$$

$$2x \cdot e^y = e^{2y} + 1 \Leftrightarrow e^{2y} - 2x \cdot e^y + 1 = 0$$

Escreva $e^y = w$. Assim:

$$w^2 - 2x \cdot w + 1 = 0 \Leftrightarrow w = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2 \cdot 1}$$

$$\text{ou} \begin{cases} w = x + \sqrt{x^2 - 1}; \\ w = x - \sqrt{x^2 - 1}. \end{cases}$$

Como $e^y = w$, teremos:

$$e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow \ln e^y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})};$$

e esta será a solução, visto que a outra será descartada pois, senão, teríamos:

$y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$; porém, sendo $x \geq 1$ para a inversa, então $x^2 \geq 1 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} \geq 0$.

Assim $-\sqrt{x^2 - 1} \leq 0$, e disso:

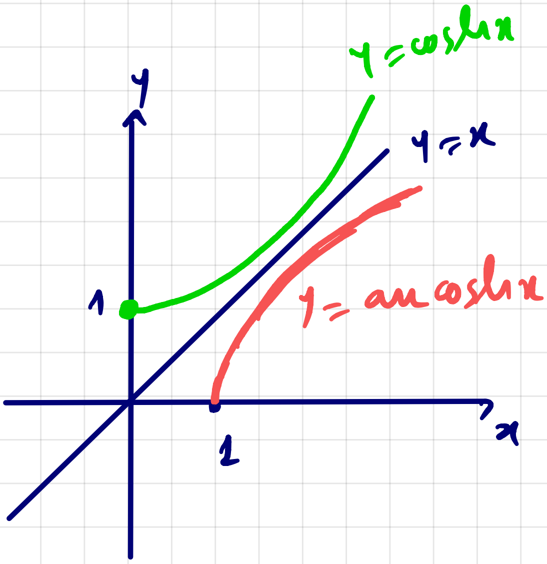
$x - \sqrt{x^2 - 1} \leq 1$; e o ln seria ≤ 0;

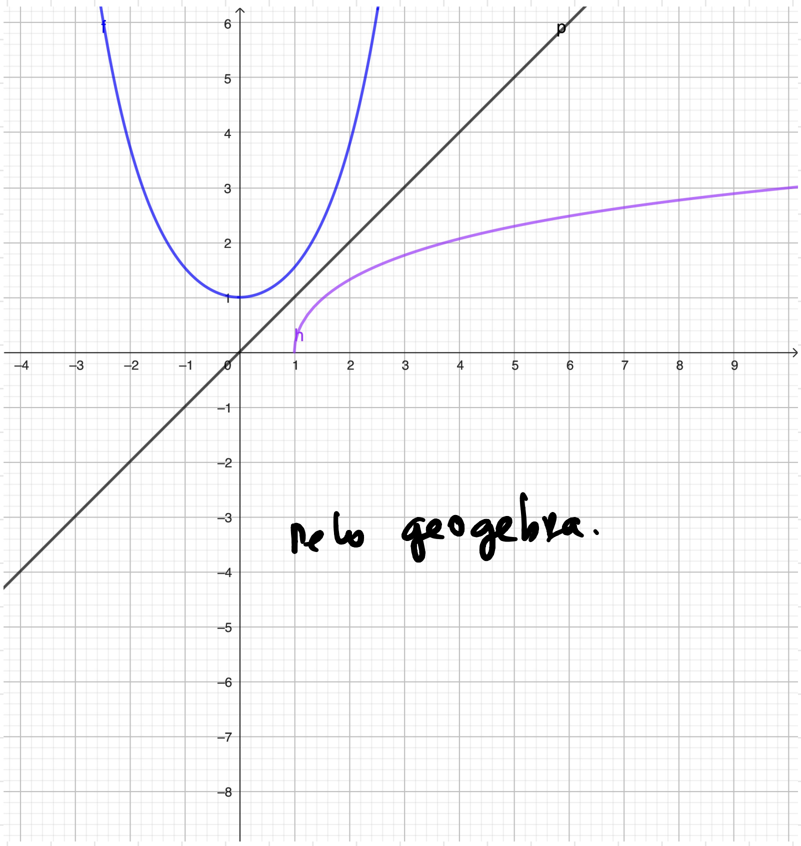
porém ln tem imagem em $[0, +\infty)$; um absurdo!

Conclusão: sendo $f: [0,+\infty) \to [1,+\infty)$, $f(x) = \cosh x$; sua inversa será:

$$g: [1,+\infty) \to [0,+\infty);$$

$$g(x) = \text{arccosh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$





pelo geogebra.

FUNÇÃO ARCO TANGENTE HIPERBÓLICA. A função tangente hiperbólica é $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tanh x$.

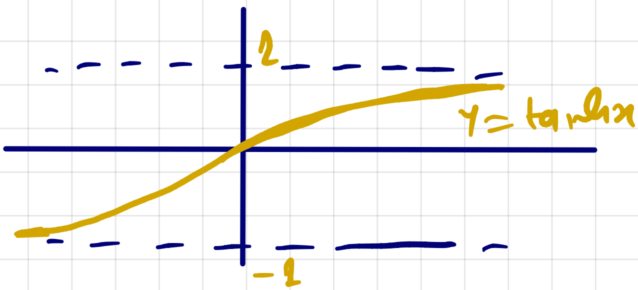
Redefinindo-a por

$$f: \mathbb{R} \to (-1, 1), \quad f(x) = \tanh(x),$$

a mesma torna-se bijetiva, existindo, então, uma inversa $g: (-1,1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = y = \text{arctanh}(x)$

$$\Updownarrow$$

$$x = \tanh y$$



$$x = \tanh y \iff x = \frac{e^{y}-e^{-y}}{e^{y}+e^{-y}} \iff x = \frac{e^{y}-\frac{1}{e^{y}}}{e^{y}+\frac{1}{e^{y}}}$$

$$\iff x = \frac{\frac{e^{2y}-1}{\cancel{e^{y}}}}{\frac{e^{2y}+1}{\cancel{e^{y}}}} \iff x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$$

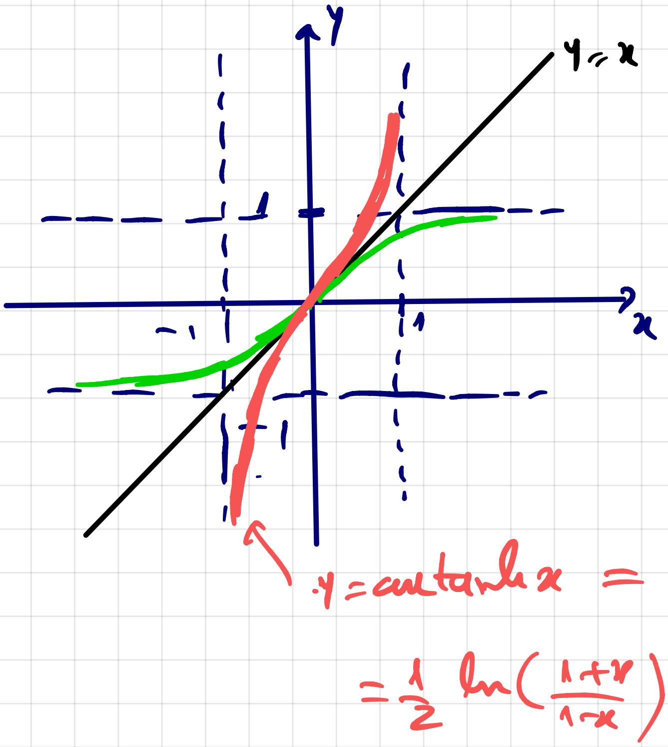
$$\iff x\cdot(e^{2y}+1) = e^{2y}-1$$

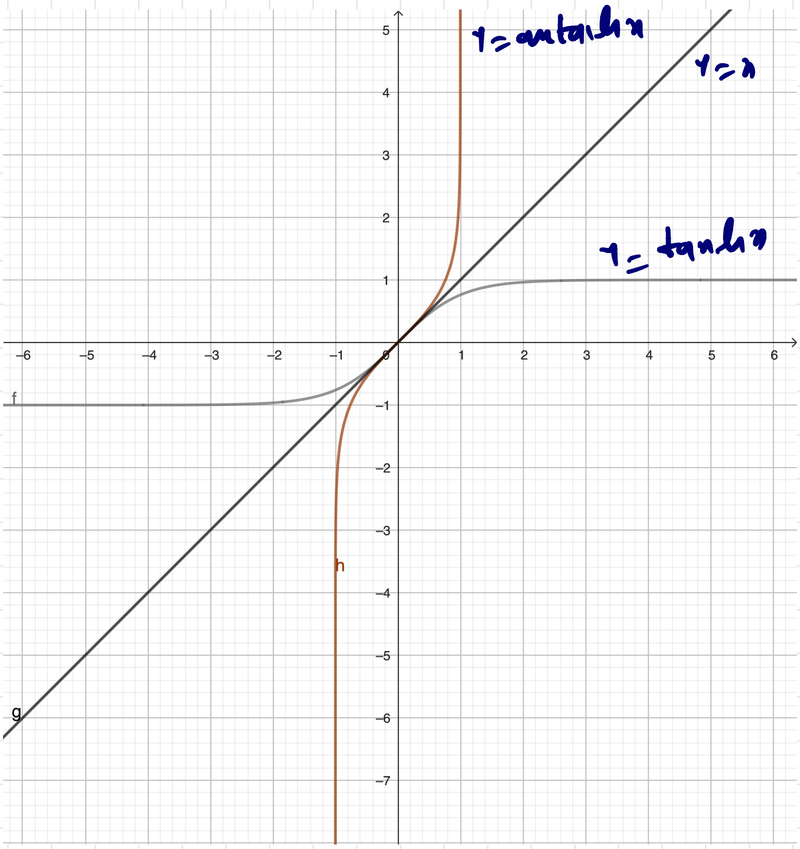
$$\iff x\cdot e^{2y} - e^{2y} = -1-x \iff e^{2y}\cdot(x-1) = -x-1$$

$$\iff e^{2y} = -\frac{x+1}{x-1}$$

$$\iff \ln e^{2y} = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

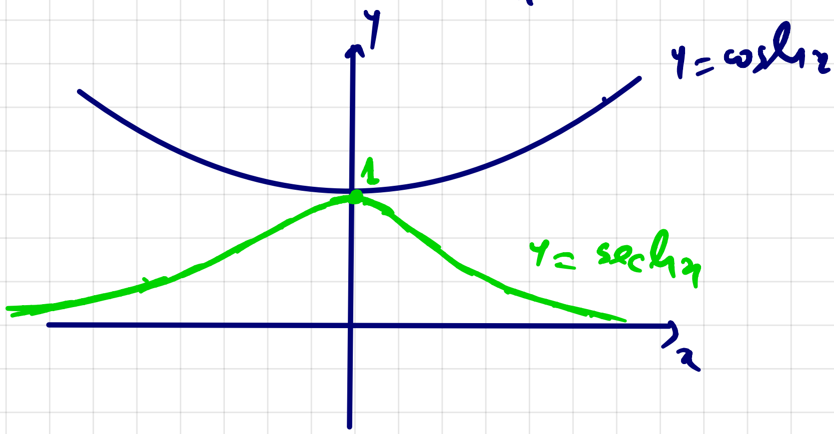
$$\iff 2y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \iff y = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$





FUNÇÃO ARCO SECANTE HIPERBÓLICA: A função secante hiperbólica foi definida por $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$



Redefinindo a função secante hiperbólica de modo a tornar-se bijetiva, temos:

$$f: [0,+\infty) \to (0,1],$$
$$f(x) = \operatorname{sech} x.$$

Logo, existe inversa $g: (0,1] \to [0,+\infty)$,

$$g(x) = \operatorname{arcsech} x \Leftrightarrow x = \operatorname{sech} y$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\cosh y} \Leftrightarrow x = \frac{2}{e^y + e^{-y}} \Leftrightarrow$$

$$x \cdot \left(e^y + \frac{1}{e^y}\right) = 2 \Leftrightarrow x \cdot \left(e^{2y} + 1\right) = 2e^y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \cdot e^{2y} - 2e^y + x = 0$$

Escreva $e^y = w$. Assim:

$$x \cdot w^2 - 2w + x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad w = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4x^2}}{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad w = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \quad \text{ou} \quad w = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}.$$

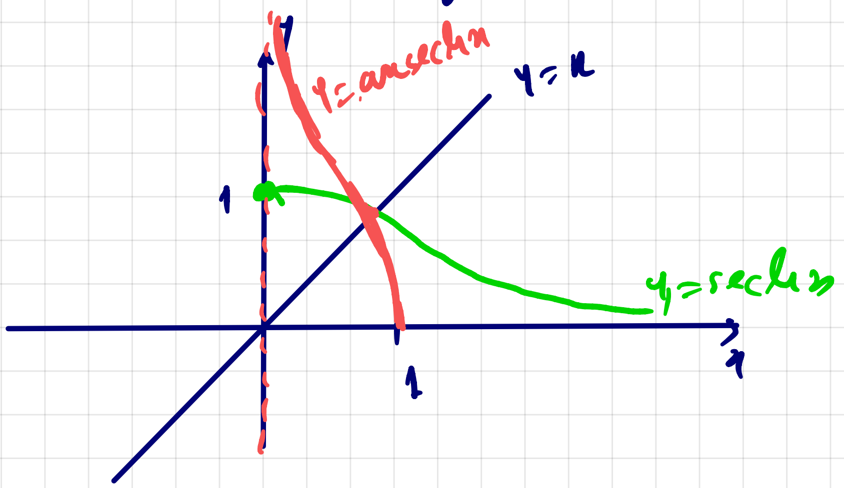
$$\Leftrightarrow \quad e^y = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \quad \text{ou} \quad e^y = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$$

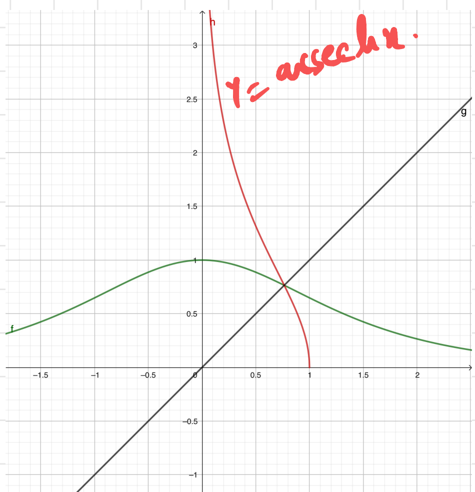
$$\Leftrightarrow \quad y = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}\right) \quad \text{ou} \quad y = \ln\left(\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

onde $x \in (0, 1]$. Descartamos a solução $y = \ln\left(\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}\right)$, pois esta fornecerá um logaritmo negativo, que fica fora do contradomínio de f, pois $CD(f) = Im(f) = [0, +\infty)$. (Verifique!)

Logo, obtemos: sendo $f: [0, +\infty) \to (0, 1]$, $f(x) = \operatorname{sech} x$, então sua inversa será:

$$g : (0, 1] \to [0, +\infty) \; ; \quad g(x) = \operatorname{arcsech} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$





O estudo e o traçado da função arco cossecante hiperbólica fica como exercício.