CÁLCULO 1.

23/04/24 — AULA 02

Na aula passada estudamos conjuntos e algumas de suas propriedades.

Os conjuntos numéricos que vamos admitir já conhecidos:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{N} \right\}$$

O conjunto $\mathbb{Q}$ equipado com uma adição

$$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$\left(\frac{a}{b}, \frac{m}{n} \right) \longmapsto \frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{an + m.b}{b.n}$$

e o produto

$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$\left(\frac{a}{b}, \frac{m}{n} \right) \longmapsto \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a.m}{b.n}$$

é um corpo pois cumpre as propriedades:

$\forall\, x, y, z \in \mathbb{Q}$, tem-se:

ADITIVAS:

A_1: $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ASSOCIATIVA)

A_2: $x + y = y + x$ (COMUTATIVA)

A_3 : $\exists\ 0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x + 0 = x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$
(EXISTÊNCIA do elemento neutro)

A_4 : $\forall x \in \mathbb{Q}$, $\exists -x$ tal que $x + (-x) = 0$
(todo elemento é simetrizável)

MULTIPLICATIVAS:

M_1 : $x.(y.z) = (x.y).z$ (ASSOCIATIVIDADE)

M_2 : $x.y = y.x$ (COMUTATIVIDADE)

M_3 : $\exists\ 1 \in \mathbb{Q}$ tal que $x.1 = x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$
(existência do neutro multipl.)

M_4 : $\forall x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $\exists\ y \in \mathbb{Q}$ tal que $x.y = 1$.
(todo elemento diferente do zero possui um inverso multiplicativo)
[neste caso, escreve-se $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$]

DISTRIBUTIVIDADE:

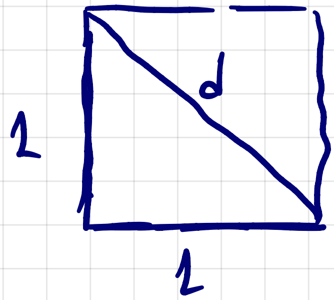
D : $x.(y+z) = x.y + x.z$

Estas 9 propriedades tornam $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ um corpo.

Porém o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais é insuficiente (ou seja, não é completo), no seguinte sentido: por exemplo, não existe número racional cujo quadrado seja 2.

Ou seja, $\nexists\, x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$

(em outras palavras, $\sqrt{2}$ não é racional).



$d^2 = 1^2 + 1^2$

$d^2 = 2$

(O PITÁGORAS PIROU NA BATATINHA)

NA ÉPOCA DA "ESCOLA PITAGÓRICA", NÃO EXISTIAM NÚMEROS NÃO RACIONAIS

Ou seja, uma aritmética em $\mathbb{Q}$ vai apresentar uma série de problemas de natureza semelhante à descrita acima, e a isso chama-se de INCOMPLETUDE DE $\mathbb{Q}$.

Mostremos que $\sqrt{2}$ não é racional.

De fato, suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja racional. Logo, existem $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{com } \operatorname{mdc}(p,q) = 1. \qquad (\mathrm{I})$$

ou seja, a fração $\frac{p}{q}$ está irredutível, ou seja, simplificada ao máximo.

Elevando ao quadrado, vamos obter:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

Ou seja, temos que p^2 é par.

Então, p é par. Logo, $\exists\ m \in \mathbb{Z}$ tal que $\boxed{p = 2m.}$ $(*)$

Assim:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2 = \frac{(2m)^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{2}^{1} = \frac{\cancel{4}^{2} m^2}{q^2} \Rightarrow q^2 = 2m^2$$

Logo, q^2 é par, donde segue que q é par.

Então, $\exists\ l \in \mathbb{N}$ tal que $\boxed{q = 2l}$. $(**)$ Disso, teremos:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \underset{\text{de } (*) \text{ e } (**)}{=} \frac{2m}{2l} \Rightarrow \underline{mdc(p,q) \geq 2}$$

uma contradição com (I)

<u>Absurdo!</u> Portanto, $\sqrt{2}$ não é racional.

O <u>completamento</u> do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é o conj $\mathbb{I}$ dos números não racionais, chamado de CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS.

$\mathbb{I}$ não é corpo pois não tem fechamento.

Por exemplo, $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in \mathbb{I}$, mas

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin \mathbb{I}.$$

Obs.: Uma outra forma de justificar que $\sqrt{2} \notin \mathbb{I}$:

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{2}}{2-1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + \cdots}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}}}$$

chamada de REPRESENTAÇÃO EM FRAÇÃO CONTÍNUA PARA A $\sqrt{2}$. Com esta representação, podemos calcular, com certa aproximação, o valor de $\sqrt{2}$, através de TRUNCAMENTOS (ou seja, cortes) da representação acima. De fato:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

1ª 2ª 3ª

1ª APROX.: $\sqrt{2} \approx 1$

2ª APROX.: $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

3ª APROX.: $\sqrt{2} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{\frac{5}{2}} = 1{,}4$

$$= 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

4ª APROX.: $\sqrt{2} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} =$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{5}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{2}{5}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\frac{12}{5}} = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12}$$

$$= 1{,}416666\ldots$$

$\vdots$

Chama-se $\mathbb{R}$ o conjunto definido por

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I},$$

i.e., a união do corpo dos racionais com o seu completamento.

$\mathbb{R}$ é um corpo e é completo.

É sobre este corpo que desenvolve-se o cálculo.

O corpo $\mathbb{R}$ dos números reais é <u>ordenado</u>, ou seja, existe o conceito de $\leq$.

<u>Def.</u>: Dados $a, b \in \mathbb{R}$, dizemos que $a \leq b$ se e somente se, existir $m \geq 0$ tal que

$$a + m = b.$$

A relação de ordem satisfaz as seguintes propriedades:

$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$, tem-se:

P_1: $x \leq y \implies x + z \leq y + z$

(monotonicidade da adição)

P_2: $x \leq y,\ z > 0 \implies x \cdot z \leq y \cdot z$

(monotonicidade da multipl.)

P_3: $x \leq y,\ z < 0 \implies x \cdot z \geq y \cdot z$

P_4: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$; ou $x < y$ ou $x > y$ ou $x = y$

(TRICOTOMIA)

Mostremos P_7:

Suponha que $x \leq y$.

Vamos mostrar que $x + z \leq y + z$, $\forall z \in \mathbb{R}$.

Sendo $x \leq y$, então, $\exists\, m \geq 0$ tal que

$$x + m = y$$

Somando $z \in \mathbb{R}$ a esta igualdade, vem:

$$(x+m) + z = y + z$$

Pela associatividade,

$$x + (m+z) = y + z.$$

Pela comutatividade;

$$x + (z+m) = y + z;$$

e, novamente, da associatividade, segue que

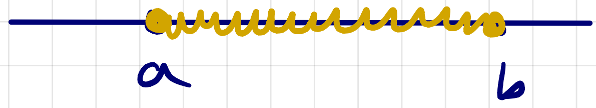
$$(x+z) + \underbrace{m}_{\geq 0} = y + z \implies x + z \leq y + z.$$

$\square$

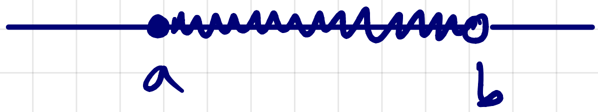
Em um corpo ordenado (e, no nosso caso de interesse, em $\mathbb{R}$), existe a noção de intervalo, como segue:

Def.: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \leq b$. Definimos os intervalos:

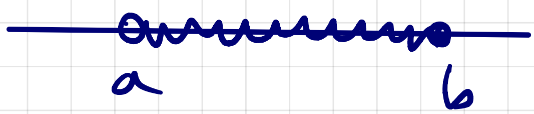
(i) $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (intervalo fechado)



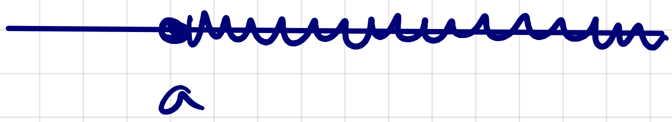
(ii) $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (intervalo misto)



(iii) $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (intervalo misto)



(iv) $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
(intervalo ilimitado à direita)



o símbolo $+\infty$ lê-se "mais infinito".

(v) $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$.

(vi) $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
(intervalo ilimitado à esquerda)

(vi) $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

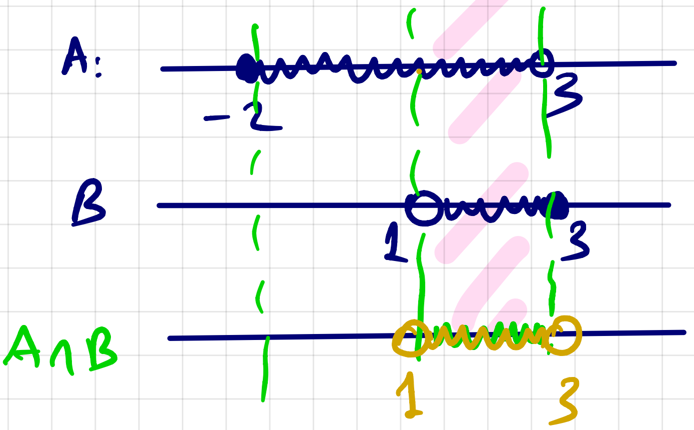
(vii) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ (intervalo ilimitado)

Tudo o que discutimos sobre conjuntos na aula passada aplicam-se a estes intervalos, visto que eles são conjuntos.

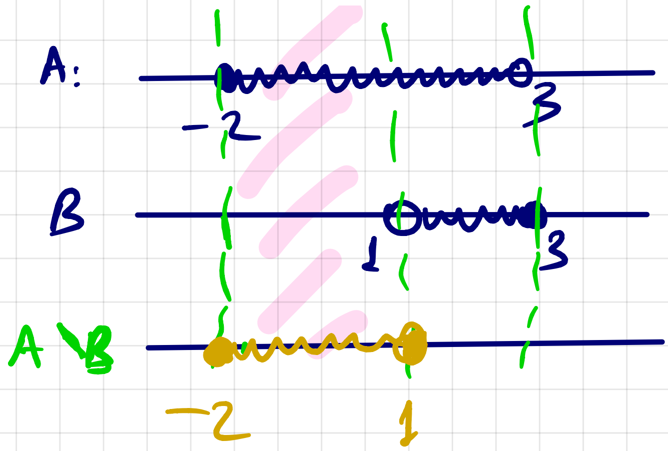
Ex.: $A = [-2, 3)$; $B = (1, 3]$; então:

$A \cap B = ?$ $A \setminus B = ?$ $B^c = ?$

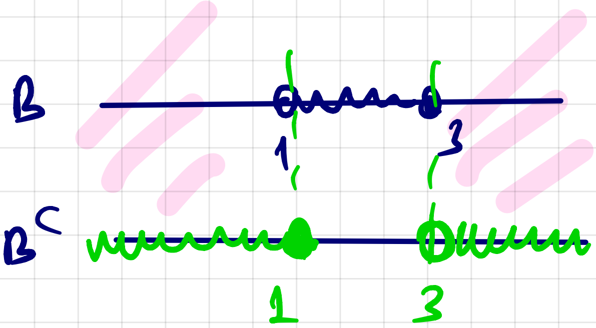
Solução:



$\Rightarrow A \cap B = (1, 3)$



$\Rightarrow A \setminus B = [-2, 1]$



$B^c = (-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$

Com a relação de ordem também tem-se problemas envolvendo inequações. Por exemplo; obter $x \in \mathbb{R}$ tal que:

(a) $x + 2 < 2x - 3$.

(b) $\dfrac{1}{x-1} \geq 2$

(c) $\dfrac{x+2}{x-1} < 1$.

Solução:

(a) $x + 2 < 2x - 3$

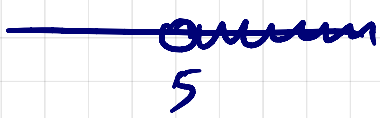
$$x + 2 - 2x < \cancel{2x} - 3 - \cancel{2x}$$

$$-x + 2 < -3 \qquad + (-2)$$

$$-x + \cancel{2} - \cancel{2} < -3 - 2$$

$$-x < -5 \qquad \times (-1)$$

$$x > 5 \qquad S = \{x \in \mathbb{R} : x > 5\}$$



(b) $\frac{1}{x-1} \geq 2$

DÁ VONTADE DE FAZER:

$\frac{1}{x-1} \geq 2 \quad \times (x-1)$

$1 \geq 2(x-1)$;

MAS se $x-1 < 0$?

aí deveria ser $1 \leq 2(x-1)$

Então, "multiplicar em cruz" não é aconselhável fazer com desigualdades.

SAÍDA:
COMPARAR COM O ZERO,
como segue:

$$\frac{1}{x-1} \geq 2 \iff \frac{1}{x-1} - 2 \geq 0$$

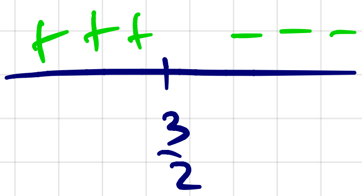
$$\iff \frac{1-2(x-1)}{x-1} \geq 0 \iff \frac{1-2x+2}{x-1} \geq 0$$

$$\iff \frac{3-2x}{x-1} \geq 0$$

QUEREMOS INVESTIGAR ONDE ESTE QUOCIENTE É ≥ 0.
PARA ISSO VAMOS ESTUDAR OS SINAIS DO NUMERADOR E DO DENOMINADOR.

SINAL DO NUMERADOR.

$$3-2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

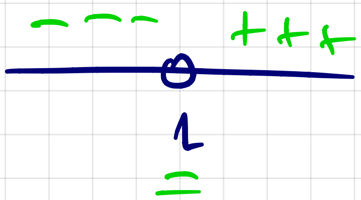


$$\forall x \; x<\frac{3}{2} \Rightarrow 2x<3 \Rightarrow 2x-3<0$$
$$\Rightarrow 3-2x>0$$

$$\forall x>\frac{3}{2} \Rightarrow 2x>3 \Rightarrow 3-2x<0$$

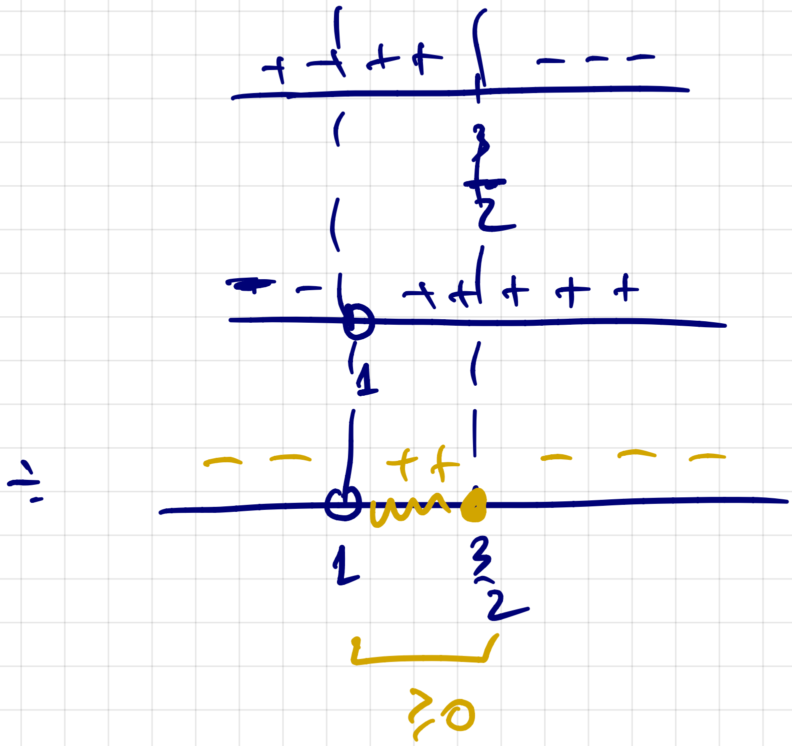
SINAL DO DENOMINADOR ($\neq 0$)

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$



$$\forall x<1 \Rightarrow x-1<0$$

$$\forall x>1 \Rightarrow x-1>0$$



$$S=\left(1,\frac{3}{2}\right]$$

(c) fica como exercício.