CÁLCULO I -

15/04/24 - AULA 01

CONTEÚDO:

- UMA REVISÃO DE COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES, INJETIVIDADE, SOBREJETIVIDADE; BIJETIVIDADE E FUNÇÕES INVERSAS.
- ESTUDO DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS.
- ESTUDO DA TEORIA DE LIMITES DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL
- ESTUDO DE CONTINUIDADE DE FUNÇÕES
- ESTUDO DE DERIVADAS E SUAS APLICAÇÕES.

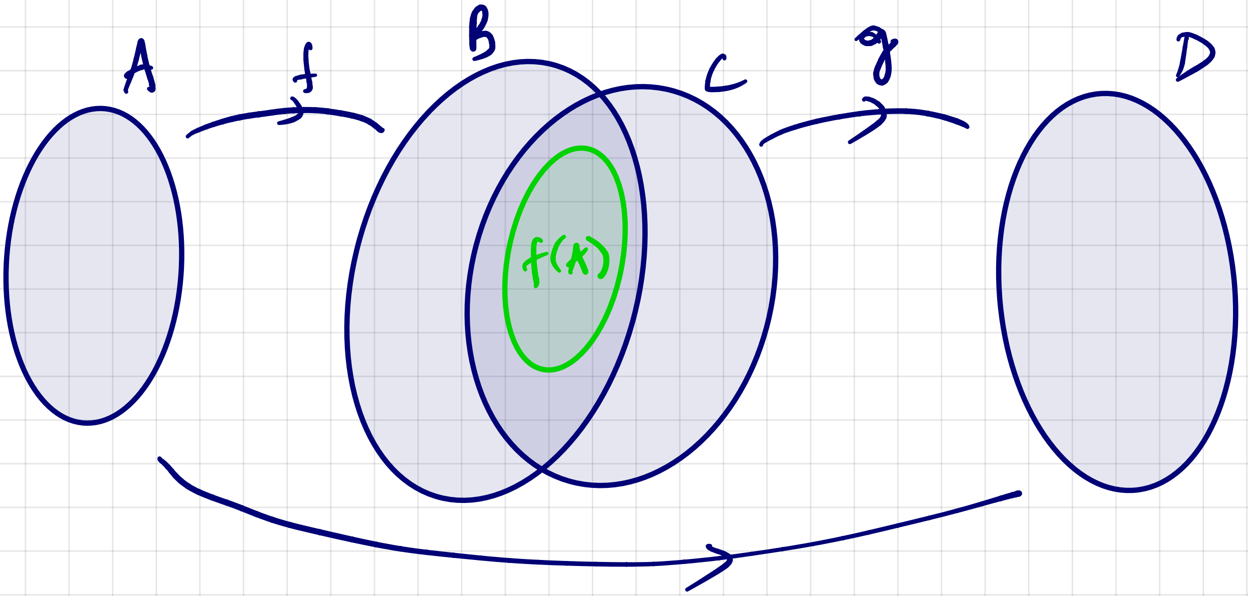
(Mais informações em wp.ufpel.edu.br/zahn)

COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES:

Def.: Sejam $f: A \to B$, $g: C \to D$ funções, com $f(A) \subset C$.
Definimos a composta $g \circ f: A \to D$ por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

IMPORTANTE, SEM ESTA EXIGÊNCIA NÃO É POSSÍVEL MONTAR COMPOSIÇÃO



Ex.: $f: [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x}$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g(x) = \cos x$. Verifique se é possível montar as composições $g \circ f$ e $f \circ g$, determinando as possíveis.

Solução: $f: [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sqrt{1+x}$.

$$Im(f) = ?$$

$$f(x) = \sqrt{1+x} \geq 0 \Rightarrow Im(f) = [0, +\infty)$$

Logo, temos:

$$\bullet\ [-1, +\infty) \xrightarrow{f} [0, +\infty) = f(A) \subset \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$g \circ f$ existe.

$\bullet\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g(x) = \cos x$. $Im(g) = [-1, 1]$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} [-1, 1]$$

$$[-1, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Ou seja, $g(\mathbb{R}) = [-1, 1] \not\subset [-1, +\infty)$;

Logo, não é possível montar a composição $f \circ g$.

Determinando $g \circ f$:

$$\begin{tikzcd}[-1,+\infty) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}\end{tikzcd}$$

$g\circ f : [-1,+\infty) \to \mathbb{R}$.

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{1+x}) = \cos\sqrt{1+x}.$$

PROPOSIÇÃO: A composição de funções é associativa.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $f: A\to B$, $g: C\to D$ e $h: E\to F$ funções tais que $f(B)\subset C$ e $g(C)\subset E$.

Vamos mostrar que

$$h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f.$$

De fato, $\forall x\in A$, temos:

$$((h\circ g)\circ f)(x) = (h\circ g)(\underbrace{f(x)}_{\omega}) = h(g(\omega)) =$$

$$= h(g(f(x))) = h((\underbrace{g\circ f}_{\varphi})(x)) = h(\varphi(x))$$

$$= (h\circ\varphi)(x) = (h\circ(g\circ f))(x), \quad \forall x\in A.$$

$\square$

obs.: A comutatividade na composição de funções é falsa, ou seja, em geral tem-se que

$$g\circ f \neq f\circ g.$$

Para justificar isso basta revisitar o exemplo anterior, onde determinamos $g \circ f$ e vimos que $f \circ g$ sequer existe!

INJETIVIDADE, SOBRETIVIDADE E BIJETIVIDADE.

Def: Seja $f: A \to B$ uma função. Dizemos que f é injetiva se, e somente se, $\forall x, y \in A$;

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

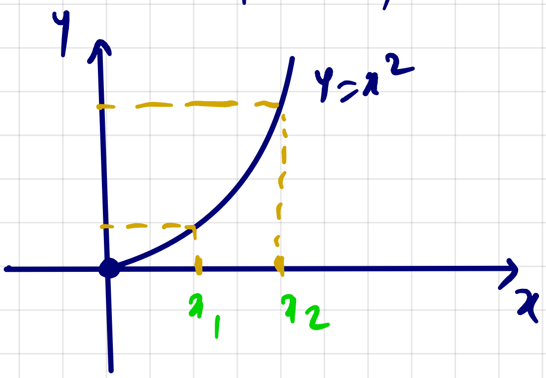
Ou, de forma transpositiva: $\forall x, y \in A$;

$$x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$$

EXEMPLOS:

(a) $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$.

f é injetiva, pois, $x_1 \neq x_2$, digamos, $x_1 < x_2$, então $f(x_1) = x_1^2 \neq x_2^2 = f(x_2)$



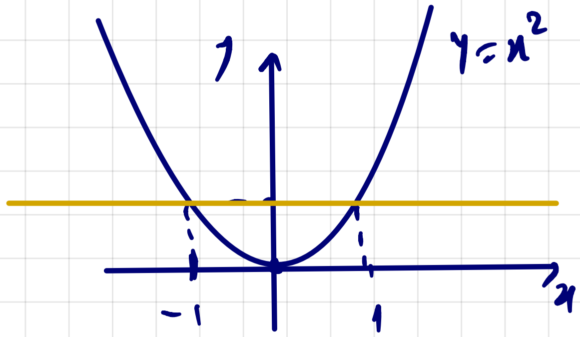
geometricamente, podemos pensar do seguinte modo: toda reta horizontal vai interceptar o gráfico de f em apenas um ponto. Isso sugere a injetividade.

(b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$

Neste caso, $f(-1) = (-1)^2 = 1 = (1)^2 = f(1)$

Ou seja, temos $x \neq y$ mas $f(x) = f(y)$.

Logo, esta f não é injetiva.



NESTE CASO TEMOS UMA RETA HORIZONTAL INTERCEPTANDO O GRÁFICO DE f EM MAIS DE UM PONTO, O QUE "TIRA" A INJETIVIDADE DE f.

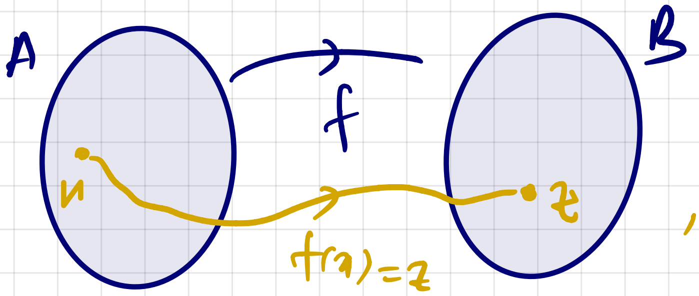
(c): $id: A \to A$, $id_A(x) = x$ é a função identidade em A.

id é injetiva, pois

$$id_A(x) = id_A(y) \Rightarrow x = y$$

Def.: Dizemos que uma função $f: A \to B$ é sobrejetiva se, e só se, $f(A) = B$. Em outras palavras: $f: A \to B$ é sobrejetiva se, e só se:

$\forall z \in B$, $\exists x \in A$ tal que $f(x) = z$.



, $\forall z \in B$

EXEMPLOS:

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
$$\cdot x \rightsquigarrow -1$$

$\exists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -1$?

Se sim, então

$$x^2 = f(x) = -1$$
$$x^2 = -1$$
$$x = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}.$$

Logo, f não é sobrejetiva.

Outra forma de verificar: $f(x) = x^2 \geq 0$

$$f(\mathbb{R}) = [0, +\infty) = Im(f) \neq \mathbb{R} = CD(f).$$

Então, f não é sobrejetiva.

(b) $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty), \quad f(x) = x^2$

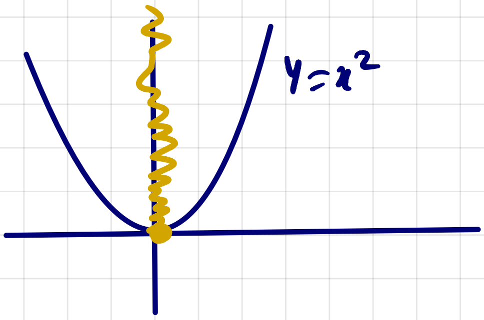
$f(\mathbb{R}) = [0, +\infty) = CD(f)$. Logo, f é sobrejetiva.

Outra forma de responder: $\forall z \in [0, +\infty)$, $\exists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = z$. De fato, basta tomar $x = \sqrt{z}$:

$$f(x) = f(\sqrt{z}) = (\sqrt{z})^2 = z$$

Rascunho: $z = f(x) = x^2$

$x^2 = z \Rightarrow x = \sqrt{z} \geq 0$

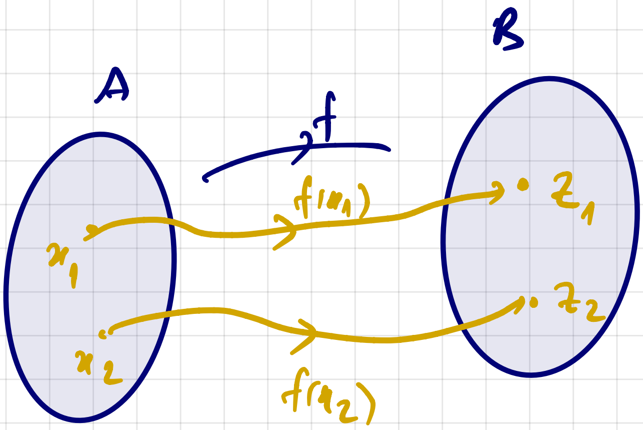


(c) $id_A : A \to A$ também é sobrejetiva. De fato, $\forall z \in A$, $\exists x \in A$ tal que $id_A(z) = z$. Basta tomar $x = z$:

$$id_A(x) = id_A(z) = z.$$

<u>Def:</u> Dizemos que $f: A \to B$ é bijetiva quando for injetiva e sobrejetiva. Mais precisamente, $f: A \to B$ é bijetiva se, e só se, $\forall z \in B$, $\underbrace{\exists!}_{}$ $x \in A$ tal que $f(x) = z$.

EXISTE UM ÚNICO



<u>Ex.1</u> $id_A : A \to A$, $id_A(x) = x$ é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva.

PROPOSIÇÃO: A composição de funções preserva injetividade, sobrejetividade e bijetividade. Ou seja, a composição de funções injetivas resulta em uma função injetiva, et cetera.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $f: A \to B$, $g: C \to D$ funções tais que $f(A) \subset C$. Então:

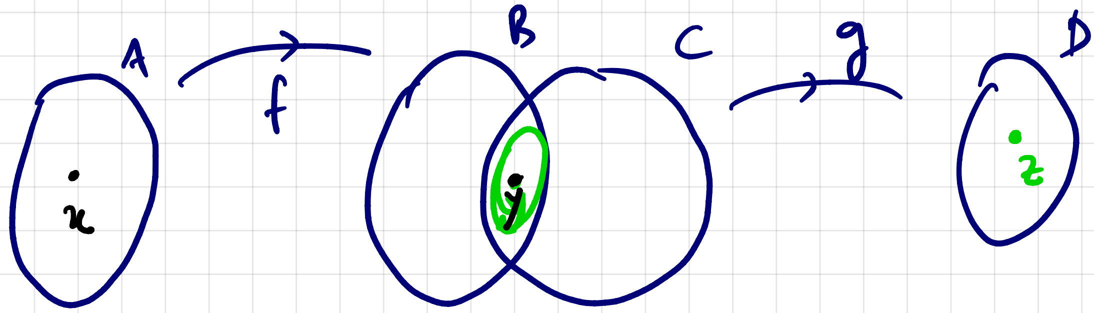
(i) Suponha f e g injetivas. Vamos mostrar que $g \circ f$ também o é. Assim, $\forall x, y \in A$, temos:

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \underset{\text{def. de composição}}{\Longrightarrow} g(f(x)) = g(f(y)) \underset{g \text{ é injetiva, por hipótese}}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow f(x) = f(y) \underset{f \text{ é injetiva, por hipótese}}{\Longrightarrow} x = y.$$

Logo, $g \circ f$ também é injetiva.

(ii) Suponha agora f e g sobrejetivas. Vamos mostrar que $g \circ f$ também o é.



Dado $z \in D$ um ponto qualquer.

Como g é sobrejetiva, segue que $\exists\, y \in C$ tal que $g(y) = z$.

Como f é sobrejetiva, $\exists\, x \in A$ tal que

$$f(x) = y,$$

ou seja $\forall z \in D$, $\exists\, x \in A$ tal que

$$g(\underbrace{y}_{\underset{f(x)}{\shortparallel}}) = z \quad , \text{ i.e.,} \quad g(f(x)) = z$$

$$\Updownarrow$$

$$(g \circ f)(x) = z.$$

Logo, $g \circ f$ é sobrejetiva.

(iii) Supondo $f : A \to B$ e $g : C \to D$ bijetivas, em particular f e g são injetivas. Logo, pelo feito em (i), segue que $g \circ f$ é injetiva.

Do mesmo modo, f e g são, em particular, sobrejetivas. Então, por (ii) segue sobrejetividade de $g \circ f$.

$\square$