CÁLCULO 1 PROF. MAURÍCIO ZAHN - $\boxed{18/04/24 \text{ - AULA 1}}$

Nesta disciplina estudaremos:

- CONJUNTOS E FUNÇÕES
- LIMITES DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL
- CONTINUIDADE
- DERIVAÇÃO E SUAS APLICAÇÕES.

O material da aula e informações estarão postados na página institucional da disciplina:

wp.ufpel.edu.br/zahn.

CONJUNTOS:

Não definimos conjuntos. É, apenas, uma coleção de objetos, obedecendo (ou não) alguma propriedade. O UNIVERSO será considerado o espaço onde é feita uma dada discussão ou teoria.

Um conjunto, normalmente, é apresentado por letras maiúsculas do nosso alfabeto e, seus elementos, por letras minúsculas.

Para relacionar elementos com conjuntos usamos o símbolo $\in$, chamado de símbolo de pertinência. Se um dado elemento não está em um conjunto, relacionamos este fato riscando o símbolo de $\in$, obtendo o símbolo $\notin$.

EX.: X o conj. de todas as letras do nosso alfabeto.

Assim, temos:

$$m \in X \ ; \ a \in X \ ; \ \lambda \notin X \ .$$

Para relacionar conjuntos usamos o símbolo de contenção $\subset$. Dessa forma, dados dois conjuntos A e B em um universo U, podemos verificar se um deles está ou não "dentro" de outro, ou seja, se ESTÁ CONTIDO ($\subset$) ou NÃO ESTÁ CONTIDO ($\not\subset$).

Por exemplo, sendo o universo U o conj. dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots\}$.

Sejam P o conjunto dos inteiros pares e I o conj. dos inteiros ímpares.

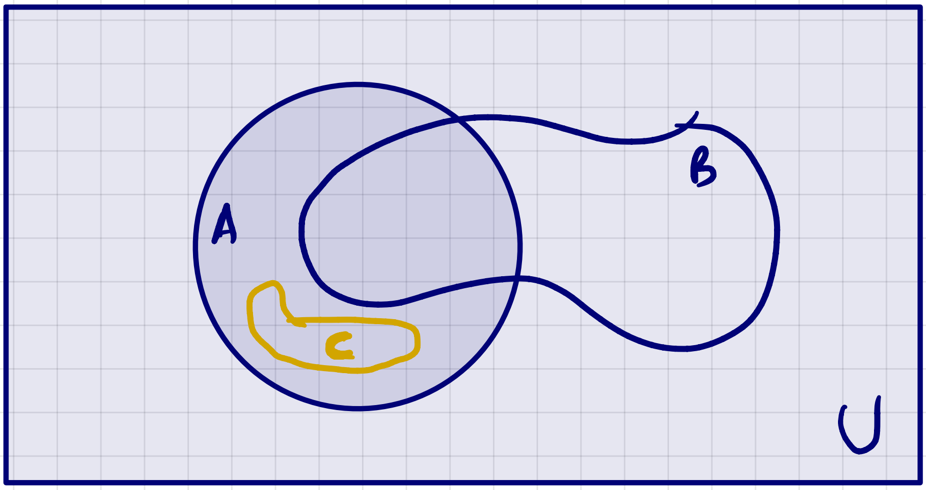
Neste caso, $P \not\subset I$ e $I \not\subset P$.

Ainda, neste contexto, temos:

M - o conj. dos múltiplos de 4.

Neste caso, $M \subset P$ e $M \not\subset I$.

Uma forma geométrica de "visualizar" a contenção de conjuntos é através do DIAGRAMA DE VENN, que consiste em figuras fechadas às quais, um elemento em seu interior pertence ao conjunto, e fora da figura não.



Neste diagrama, $A \not\subset B$ e $B \not\subset A$, $C \subset A$.

Dados dois conjuntos A e B em um universo U, para que $A \subset B$, é necessário e suficiente que, todo elemento de A seja elemento de B.

Simbolicamente, escrevemos:

$$A \subset B \overset{\text{def.}}{\iff} \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

A negação dessa sentença será:

$$A \not\subset B \iff \exists x \in A \text{ tal que } x \notin B.$$

<u>O CONJUNTO VAZIO:</u> é todo conjunto que não possui elementos. É denotado por $\emptyset$ ou $\{\ \}$

<u>EX.:</u> $A = \{ n \in \mathbb{N} : n^2 < 0 \} = \emptyset$.

<u>PROPOSIÇÃO:</u> O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

<u>DEMONSTRAÇÃO:</u> Seja A um conjunto qualquer em um universo U. Vamos mostrar que $\emptyset \subset A$.

Por absurdo, suponha que $\emptyset \not\subset A$. Então, temos que $\exists\, x \in \emptyset$ tal que $x \notin A$. Mas $x \in \emptyset$ é um absurdo! Portanto, $\emptyset \subset A$.

Pela arbitrariedade da escolha do conjunto A, segue o resultado.

$\square$

Def.: Dados dois conjuntos em um universo U. Dizemos que A e B são iguais, e escrevemos $A = B$, se, e somente se, todo elemento de A for elemento de B, e vice-versa.

Simbolicamente,

$$A = B \overset{\text{def.}}{\iff} A \subset B \text{ e } B \subset A.$$

PROPOSIÇÃO: A continência de conjuntos cumpre as seguintes propriedades: Dados A, B e D conjuntos em um universo U, então:

(i) $A \subset A$ (REFLEXIVIDADE)

(ii) $A \subset B$ e $B \subset A \Rightarrow A = B$ (ANTI-SIMÉTRICA)

(iii) $A \subset B$ e $B \subset D \Rightarrow A \subset D$ (TRANSITIVIDADE).

DEMONSTR.:

(i) $A \subset A$:

Por absurdo, se $A \not\subset A$, então $\exists x \in A$ tal que $x \notin A$, o que é contradição. Portanto, $A \subset A$.

(ii) É parte da def. de igualdade de conj.

(ix) $A \subset B$ e $B \subset D \Rightarrow A \subset D$:

Suponha que $A \subset B$ e $B \subset D$.
Vamos mostrar que $A \subset D$. Para isto, dado $x \in A$, mostraremos que $x \in D$.
Dado $x \in A$. Como $A \subset B$, por hipótese, segue que $x \in B$. Como $B \subset D$, por hipótese, segue que $x \in D$. Assim, obtemos:

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in D, \quad \text{i.e.,} \quad A \subset D.$$

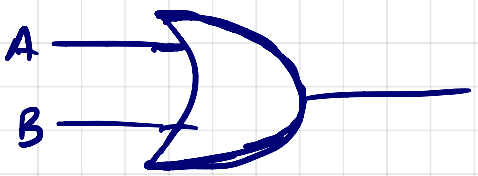
$\square$

__Def.:__ Sejam A e B conjuntos em um universo U.
Definimos as operações:

(a) __UNIÃO:__, denotada por $A \cup B$, é o conjunto de todos os elementos que pertencem a pelo menos um dos dois conjuntos. Simbolicamente:

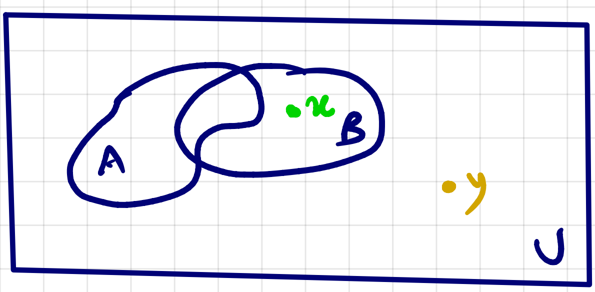
$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Em linguagem de portas lógicas:



Note que $x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ e $x \notin B$.

Em diagrama de Venn:



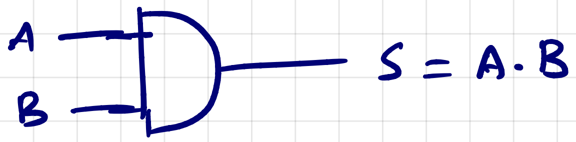
$x \in A \cup B$ (pois $x \in B$)

$y \notin A \cup B$, pois $y \notin A$ __e__ $y \notin B$

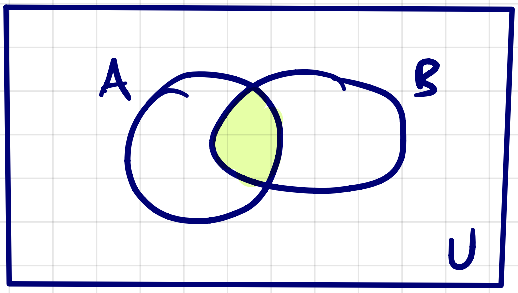
(b) INTERSEÇÃO: denotada por $A \cap B$, é o conjunto dos elementos comuns a A e a B. Simbolicamente, escrevemos:

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Em linguagem de portas lógicas, temos:



Em diagrama de Venn:

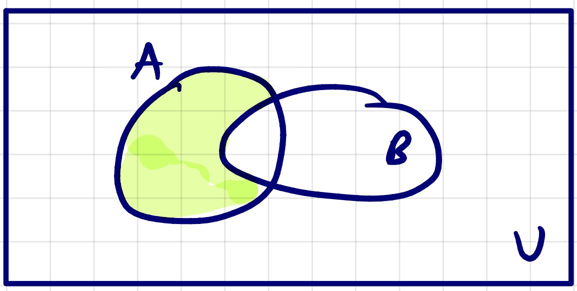


Note que $x \notin A \cap B \iff x \notin A$ ou $x \notin B$.

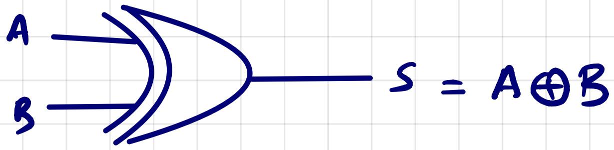
(c) DIFERENÇA: Denotada por $A \setminus B$ ou $A - B$, é o conjunto de todos os elementos que estão exclusivamente em A, ou seja, retira de A os elementos que pertenceriam também ao conj. B. Simbolicamente:

$$A \setminus B = \{x \in U : x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Em diagrama de Venn:



Em linguagem de portas lógicas temos a porta XOR:



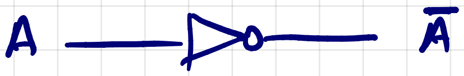
Note que

$$x \notin A \setminus B \iff x \notin A \text{ ou } x \in B.$$

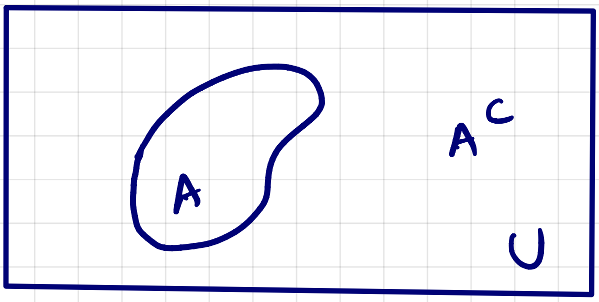
(d) COMPLEMENTAR: o complementar de um conjunto A, denotado por A^c, é o conj. dos elementos que estão fora de A, em relação ao universo U. Simbolicamente,

$$A^C = \{x \in U : x \notin A\}.$$

Em linguagem de portas lógicas A^c seria o inversor:



Em diagrama de Venn:



Note que $x \notin A^c \iff x \in A$.

PROPOSIÇÃO: Dados A, B, D, M, N conjuntos em um universo U, valem as propriedades:

01) $A \cup \emptyset = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$

02) $A \cap A = A$; $A \cup A = A$

03) $(A^c)^c = A$ (IDEMPOTÊNCIA)

04) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ (COMUTATIVIDADE)

05) $$\left.\begin{array}{l} A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D) \\ A \cup (B \cap D) = (A \cup B) \cap (A \cup D) \end{array}\right\}$$ (DISTRIBUTIVIDADES)

06) $A \subset B$; $M \subset N \Rightarrow A \cup M \subset B \cup N$

07) $\emptyset^c = U$; $U^c = \emptyset$

08) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

09) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

LEIS DE DE MORGAN.

10) $$\left.\begin{array}{l} A \cup (B \cup D) = (A \cup B) \cup D \\ A \cap (B \cap D) = (A \cap B) \cap D \end{array}\right\}$$ ASSOCIATIVIDADES

DEMONSTR.: Provaremos a 1ª da nº 5 e as demais ficam como exercício:

$$A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D)$$

AF-01: $A \cap (B \cup D) \subset (A \cap B) \cup (A \cap D)$:

Dado $x \in A \cap (B \cup D)$, vamos mostrar que

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap D)$.

De fato, se $x \in A \cap (B \cup D)$, então

$$x \in A \quad e \quad x \in B \cup D.$$

Logo, temos que $x \in A$ e $(x \in B$ ou $x \in D)$

Então, $x \in A$ e $x \in B$ ou $x \in A$ e $x \in D$.

Portanto, $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap D$, i.e.:

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap D),$$

provando a AF·01.

AF-02: $(A \cap B) \cup (A \cap D) \subset A \cap (B \cup D)$: exercício.

Pelas af. 01 e 02 segue a igualdade.

$\square$