Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo 2 - Turma T2
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 11 de Exercícios - Sequências numéricas. Séries numéricas

1. Prove cada limite a seguir pela definição.

   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{3-5n} = -\dfrac{2}{5}$ (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{3n-1} = \dfrac{1}{3}$

   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$ (d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2-4n}{4n-7} = -1$

2. Determine se a sequência (x_n) dada converge ou diverge. Se convergir, determine o seu limite.

   (a) $x_n = \dfrac{3+5n^2}{n+n^2}$ (b) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$ (c) $x_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$

   (d) $x_n = \dfrac{\ln n}{\ln 2n}$ (e) $x_n = \dfrac{n^2}{e^n}$ (f) $x_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

   (g) $x_n = \dfrac{n!}{2^n}$ (h) $x_n = n \cdot \operatorname{sen} \dfrac{1}{n}$ (i) $x_n = \arctan 2n$

3. Prove o seguinte Teorema, versão para sequências do Teorema do Sanduíche:
   Teorema. *Sejam (x_n), (y_n) e (z_n) sequências tais que $x_n \le y_n \le z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$.*

4. Utilize o Teorema do exercício anterior para provar que $\dfrac{\cos n}{n} \to 0$.

5. Analisar a convergência das séries a seguir e determinar a sua soma.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$ [Sugestão: $2n-1 = 3n-(n+1)$]

6. **(Sel. Mestrado UFSM 2011/1)**

   (a) Considere duas sequências de números reais não-negativos (a_n) e (b_n) tais que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c$ para algum $c > 0$. Mostre que $\sum a_n$ converge se, e somente se, $\sum b_n$ converge.

   (b) Use o resultado anterior para estudar a convergência das séries $\sum \dfrac{2n+1}{(n+1)^2}$ e $\sum \dfrac{1}{2^n-1}$.

7. Decida se cada série a seguir é convergente ou divergente, usando um teste adequado.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+5}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

8. Para todo $p \in \mathbb{N}$ fixado, prove que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}$$

   converge.