Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Química e Computação
Disciplina de Cálculo 1 - Prof. Dr. Maurício Zahn

Lista 10 de Exercícios - Teoremas de Rolle e Lagrange. Problemas de Máximos e mínimos

1. Mostre que $f(x) = x^3 + 9x - 4$ tem no máximo uma raiz real.
   Sugestão: Faça a prova por absurdo, ou seja, suponha que f tenha duas raízes reais α e β. Aplique o teorema de Rolle em seguida.

2. Seja $f(x) = \tan x$.

   (a) Mostre que $\nexists\, c \in (0, \pi)$ tal que $f'(c) = 0$, mesmo que $f(0) = f(\pi) = 0$.

   (b) Explique por que o resultado de (a) não viola o teorema de Rolle.

3. Em cada item abaixo, mostre que a função dada satisfaz as hipóteses do Teorema de Lagrange (Teor. do Valor Médio) no intervalo $[a, b]$ dado e determine o valor de $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

   (a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ em $[0, 1]$.
   (b) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ em $[0, 1]$.
   (c) $f(x) = \operatorname{arcsen} x$ em $[-1, 1]$.
   (d) $f(x) = \ln(x - 1)$ em $[2, 4]$.
   (e) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x$ em $[-2, 1]$.
   (f) $f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}$ em $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4. Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$.

5. Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que

$$\left| \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x} \right| \leq |\beta - \alpha|\,, \quad \text{se} \quad x \neq 0.$$

6. Mostre que $\sqrt{1 + h} < 1 + \frac{1}{2}h$, se $h > 0$.

7. Um fabricante pretende construir uma caixa retangular a partir de uma lâmina de 8cm×5cm, cortando um quadrado de cada um de seus cantos. Ache o lado desse quadrado para que o volume da caixa a ser construída seja máximo. (Resp. 1cm).

8. Um pedaço de arame com 10 m de comprimento é cortado em duas partes. Uma delas é curvada na forma circular e a outra, na forma de um quadrado. Como dividir o fio de tal modo que a área combinada das duas figuras seja a menor possível?
   (Resp. raio da circunferência: $\frac{5}{\pi+4}$ m; lado do quadrado: $\frac{10}{\pi+4}$m).

9. Um fazendeiro dispõe de 600 m de material para cercar um pasto retangular adjacente a um muro já existente. Ele planeja construir uma cerca paralela ao muro, duas cercas formando as extremidades laterais e uma quarta cerca (paralela às duas últimas) para dividir o cercado em duas partes iguais. Qual é a área máxima que pode ser cercada?

10. Ache o raio e a altura de um cilindro circular reto com o maior volume, o qual pode ser inscrito em um cone circular reto com 10 cm de altura e 6 cm de raio.

11. Se 1200 cm^2 de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível para fazer tal caixa (considere o material sendo um quadrado de área 1200 cm^2).
(Resp. altura da caixa: $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm; lado: $\frac{40\sqrt{3}}{3}$ cm).

12. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimentos 3 cm e 4 cm, se dois lados do retângulo estiveres sobre os catetos.
(Resp. A área máxima será 3 cm^2).

13. A taxa (em mg de carbono/m^3/h) na qual a fotossíntese ocorre para uma espécie de fitoplâncton é modelada pela função

$$p = \frac{100I}{I^2 + I + 4}$$

onde I é a intensidade de luz (medida em milhares de velas). Para qual intensidade de luz p é máximo? (Resp. $I = 2$).

14. Encontre o número positivo tal que a soma dele com o seu inverso seja tão pequena quanto possível.

15. Numa dada comunidade, uma certa epidemia alastra-se de tal forma que x meses após o seu início, $P\%$ da população estará infectada, onde

$$P = \frac{30x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Em quantos meses o número de infectados atingirá o máximo e que porcentagem da população esse número representa? (Resp. 1 mês, $P = 7,5\%$).

16. Se uma lata fechada com volume 16π cm^3 deve ter a forma de uma cilindro circular reto, ache a altura e o raio, se um mínimo de material deve ser usado em sua fabricação.
(Resp. $R = 2$ cm e $h = 4$ cm).

17. Calcular o volume máximo do cilíndro circular reto que pode ser inscrito em um cone de 12cm de altura e 4cm de raio da base, de modo que os eixos do cilindro e do cone coincidam.
(Resp. $R = \frac{8}{3}$cm e $h = 4$cm, e portanto $V = \frac{256\pi}{9}$cm^3).

18. Prove que uma função polinomial de terceiro grau possui exatamente um ponto de inflexão. Faça alguns desenhos para ilustrar também.

19. Seja $f(x) = x^n$, onde $n > 1$. Mostre que o gráfico de f tem um ponto de inflexão se n for ímpar e não tem nenhum ponto de inflexão se n for par.

20. Seja $f(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 - 2x + 1$. Que condições as constantes b e c devem satisfazer para que 1 seja ponto de inflexão de f?

21. Faça um estudo completo de cada função abaixo, determinando domínio, zeros, assíntotas (se existirem), pontos críticos, intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de máximos e mínimos, concavidades e pontos de inflexão.

(a) $f(x) = x^4 - 2x^3$ (b) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$ (c) $f(x) = \dfrac{2-x}{x-3}$

(d) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+1}$ (e) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ (f) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3-1}$

(g) $f(x) = (1-x)x^{\frac{1}{5}}$ (h) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ (i) $f(x) = \ln\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

(j) $f(x) = 2 + (x-3)^{\frac{1}{3}}$ (k) $f(x) = 2\tan\frac{x}{2};\ x \in (-\pi, \pi)$ (ℓ) $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$

(m) $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}$ (n) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$