Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Química e Computação
Disciplina de Cálculo 1 - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 08 de Exercícios - Derivadas, derivação implícita, de funções paramétricas e regra da cadeia

1. Sendo $1 \neq a > 0$ e $v = v(x)$, prove a seguinte regra de derivação:
$$y = a^v \Rightarrow y' = a^v \cdot \ln a \cdot v'.$$
Se $a = e$, onde e é o número de Euler, o que obtemos?
Sugestão: de $y = a^v$, aplique propriedades dos logaritmos usando o logaritmo natural.

2. Prove a seguinte regra de derivação:
$$y = x^x \Rightarrow y' = (1 + \ln x)x^x.$$

3. Calcule a derivada de cada função abaixo:
(a) $f(x) = \sqrt[5]{\dfrac{x-1}{x+2}}$ (b) $f(x) = \ln \dfrac{\cos x}{\sqrt{4-3x^2}}$ (c) $f(x) = \csc \dfrac{1-\sqrt{x}}{\ln(1-x)}$
(d) $f(x) = e^{\sqrt{\tan(2x^{-2}+x)}}$ (e) $f(x) = \sqrt{x \cdot \operatorname{sen}(1-x)}$ (f) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \tan e^{\sqrt{x}}$

4. Usando as regras de derivação estudadas em aula, calcule a derivada de cada função abaixo, simplificando a resposta ao máximo.
(a) $y = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{x}{x-4} + 3$ (b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \ln \dfrac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}$
(c) $y = \dfrac{x}{4}\sqrt{x^2-4} - \ln(x + \sqrt{x^2-4})$ (d) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{25-9x^2} + \dfrac{25}{6} \operatorname{arcsen} \dfrac{3x}{5}$

5. Calcule a derivada de cada função implícita abaixo.
(a) $y^3 - 3y + 2ax = 0$ (b) $\cos(xy) = x$ (c) $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$
(d) $y = \cos(x+y)$ (e) $\sqrt{xy} + 2y = \sqrt{x}$ (f) $\ln(x^2+y^2) - 3x^2y^3 = \sqrt{x+y}$

6. Ache a equação da reta tangente à curva de equação $x^3 + y^3 = 2xy + 5$ em $P(2, 1)$.

7. Encontre a equaçãoo da reta tangente à curva de equação $y = \dfrac{2x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ em $P(3, 3)$.

8. Mostre que a tangente à curva $\left(\dfrac{x}{a}\right)^n + \left(\dfrac{y}{b}\right)^n = 2$ no ponto $P(a, b)$ é dada pela equação $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2$.

9. O *folium de Descartes* é o gráfico da equação $x^3 + y^3 = 3xy$. Esta curva foi proposta inicialmente René Descartes como um desafio a Pierre de Fermat(1601-1665) para achar sua reta tangente em um ponto arbitrário. Ache a equação da reta tangente ao folium no ponto $A(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

10. (**Conc. Docente IF-Sul Pelotas 2008**) A equação da reta tangente, y como função de x, à curva $x^2 = \dfrac{x+2y}{x-2y}$ no ponto $P(1, 0)$ é

(a) $x + 2y - 1 = 0$. (b) $x - 2y - 1 = 0$.

(c) $x - 4y + 1 = 0$. (d) $x + 4y - 1 = 0$.

11. (**Conc. Docente IF-Sul Sant. Livram. 2014**) A posição de um corpo em um instante t é dada por $s(t) = 16t - t^2$. Considerando o Sistema Internacional de Unidades (SI), a velocidade e a aceleração do corpo no instante $t = 4$ são, respectivamente,

    (a) 8 e -2. (b) -2 e 8. (c) 8 e 8. (d) -2 e -2.

12. (**Conc. Docente IF-Sul Charqueadas 2013**)A equação da posição de um móvel é dada pela equação $S = \ln(2t^2 - 4t - 4)$, sendo S dado em metros e t em segundos, a velocidade deste móvel para $t = 3$ s é

    (a) 12 m/s. (b) 8 m/s. (c) 4 m/s. (d) 2 m/s.

13. (**Conc. Docente IF-Sul Lageado 2014**) Considere que um projétil é lançado verticalmente para cima e tem a sua posição determinada pela função $s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, definida por $s(t) = 2 - 30t - 5t^2$, sendo s medido em metros e t em segundos. A velocidade desse projétil, após $2,5$ segundos do seu lançamento, é, aproximadamente, de

    (a) 5 m/s. (b) 7 m/s. (c) 46 m/s. (d) 108 m/s.

14. (**Conc. Docente IF-Sul Camaquã 2011**) Sobre uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ afirmam-se:

    I. Se f é diferenciávelem $a \in \mathbb{R}$, então f é contínua em a.

    II. Se f é contínua em $a \in \mathbb{R}$, então f é diferenciável em a.

    III. A função $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x \leq 1 \\ -x^2 + 3, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ é contínua e diferenciável em $x = 1$.

    Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s)

    (a) I apenas. (b) I, II e III. (c) II apenas. (d) III apenas.

15. Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas, respectivamente, por $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = e^x$ e $h(x) = \operatorname{sen} x$, calcule cada derivada a seguir, usando a regra da cadeia.

    (a) $(g \circ f)'(x)$ (b) $(f \circ g)'(x)$ (c) $(g \circ h)'(x)$ (d) $(h \circ f)'(x)$

16. Sejam $f : \mathbb{R} \to (1, +\infty)$ e $g : (1, +\infty) \to (2, +\infty)$ dadas, respectivamente, por

    $$f(x) = 1 + e^{1-x} \text{ e } g(x) = x^2 + 1.$$

    Determine $(g \circ f)'$, usando a regra da cadeia.

17. A força F, em Newtons, entre duas cargas é $F = \frac{100}{r^2}$, onde r é a distância, em metros, entre elas. Determine $F'(t)$ em $t = 10$ segundos, se a distância r é dada por $r = 1 + 0,4t^2$.

18. Calcule a derivada $f'(x)$ de cada função abaixo, dada parametricamente.

(a) $\begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = \cos t \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1} \\ y = \dfrac{t-1}{\sqrt{t^2+1}} \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = b\operatorname{sen}^2 t \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x = \dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y = \dfrac{\operatorname{sen}^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x = e^{2t-1} \\ y = te^{2t-1} \end{cases}$

19. Demonstre que a função dada pelas equações paramétricas $\begin{cases} x = 2t + 3t^2 \\ y = t^2 + 2t^3 \end{cases}$ satisfaz a equação

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

20. Calcule a derivada de ordem 3 de cada função:

(a) $f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + 1$ (b) $f(x) = \ln(1-x)$ (c) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} 2x}$