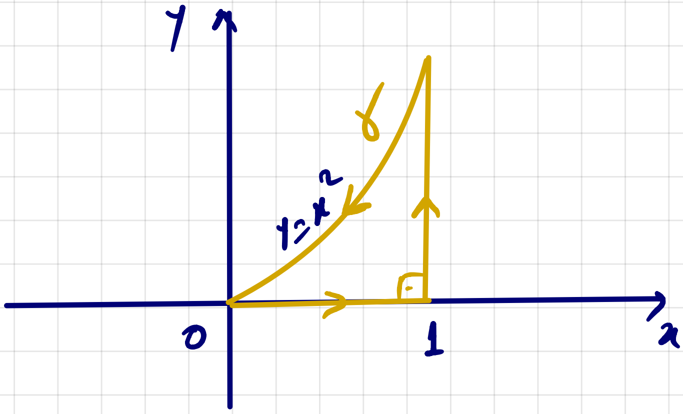
Na aula passada estudamos a prova do T. de Green:

$$\oint_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} = \oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA,$$

com γ – seccionalmente suave, $\vec{F} = (P, Q)$ com $P, Q \in C^1(\Omega)$, sendo $\Omega = \text{int}\,\gamma$.

Vejamos exemplos:

01) Calcule $\oint_\gamma \vec{F}\, d\vec{r}$, sendo $\vec{F}(x,y) = (x^2 y, xy)$ e γ o caminho dado no esquema:



Solução: Pelo T. de Green:

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA, \text{ onde:}$$

$$\begin{cases} P(x,y) = x^2 y \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = x^2 \\ Q(x,y) = xy \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = y \end{cases} ; \quad \Omega = \text{int}(\gamma)$$

Logo,

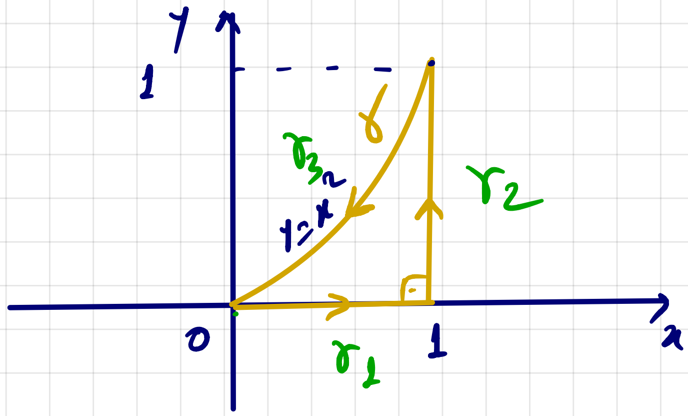
$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x^2} (y - x^2)\, dy \cdot dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \left(\frac{y^2}{2} - x^2 y \right) \Bigg|_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_{x=0}^{x=1} \left(\frac{x^4}{2} - x^4 - 0 \right) dx$$

$$= \int_0^1 -\frac{x^4}{2}\, dx = -\frac{1}{2} \frac{x^5}{5} \Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - 0 \right)$$

$$= -\frac{1}{10}$$

Obs.: Neste caso, podemos calcular a integral de linha diretamente, i.e., sem o uso do T. de Green:



$$\vec{F}(x,y) = (x^2 y, xy)$$

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \rightarrow dx = dt \\ y = 0 \rightarrow dy = 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} ; \quad 0 < t \leq 1 .$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} ; \quad 0 < t \leq 1$$

$$\oint_\gamma \vec{F} d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\gamma_3} \vec{F} d\vec{r}$$

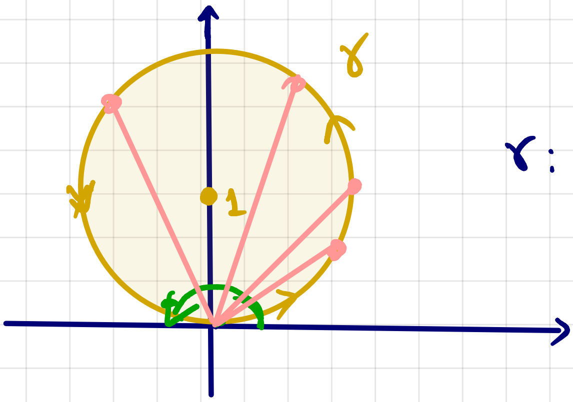
... et cetera...

02) Calcule $\oint_\gamma \vec{F} d\vec{r}$, sendo $\vec{F}(x,y) = (x^2+y^2, xy)$,

e γ a circunferência $x^2 + (y-1)^2 = 1$; com orientação positiva.

<u>solução:</u>

centro da circunferência: $(0,1)$



$$\gamma : \begin{cases} x = 1.\cos\theta \\ y = 1 \operatorname{sen}\theta + 1 \end{cases}$$

De fato:

$$\underbrace{x^2 + (y-1)^2}= \cos^2\theta + (\operatorname{sen}\theta \cancel{+1} \cancel{-1})^2 = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta \underbrace{= 1}.$$

$$\boxed{0 \leq \theta \leq 2\pi}$$

$0 \leq \rho \leq$ valor máximo

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\operatorname{sen}\theta \end{aligned}\right\} \text{ esquecimento geral.}$$

Pela eq. da circunferência:

$$x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

$$(\rho\cos\theta)^2 + (\rho\,\mathrm{sen}\,\theta - 1)^2 = 1$$

$$\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\mathrm{sen}^2\theta - 2\rho\,\mathrm{sen}\,\theta + \cancel{1} = \cancel{1}$$

$$\rho^2\underbrace{(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta)}_{=1} - 2\rho\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

$$\rho^2 - 2\rho\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \qquad \div \rho$$

$$\rho - 2\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = 2\,\mathrm{sen}\,\theta} \quad \text{; } \rho \text{ máximo.}$$

$$\boxed{0 \leq \rho \leq 2\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Isto posto, teremos:

$$\oint_\gamma \vec{F}\,d\vec{r} = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \quad ; \quad \text{onde}$$

$$P(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$$

$$Q(x,y) = xy \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = y$$

$$= \iint_\Omega (y - 2y)\,dA = \iint_\Omega -y\,dA = \underbrace{\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}}_{\text{COORD. POLARES}} \int_{\rho=0}^{\rho=2\,\mathrm{sen}\,\theta} -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \cdot \rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= -\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \mathrm{sen}\,\theta \left(\int_{\rho=0}^{\rho=2\,\mathrm{sen}\,\theta} \rho^2\,d\rho\right) d\theta = -\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \mathrm{sen}\,\theta \cdot \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_{\rho=0}^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} d\theta =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{8\operatorname{sen}^3\theta}{3}\, d\theta = -\frac{8}{3}\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2\theta)^2\, d\theta =$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$= -\frac{8}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)\, d\theta$$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi} d\theta + \frac{\cancel{4}\,1}{3\;\cancel{2}}\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\,(2\,d\theta) - \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\underline{\cos^2 2\theta}\, d\theta$$

$$\cos^2 2\theta = \frac{1+\cos 4\theta}{2}$$

$$= -\frac{2}{3}\,\theta\Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{3}\cdot \operatorname{sen} 2\theta\Big|_0^{2\pi} - \frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\int_0^{2\pi}(1+\cos 4\theta)\, d\theta$$

$$= -\frac{4\pi}{3} + \underbrace{\frac{2}{3}\operatorname{sen} 4\pi}_{=0} - \underbrace{\frac{2}{3}\operatorname{sen} 0}_{=0} - \frac{1}{3}\cdot\int_0^{2\pi} d\theta - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos 4\theta \cdot 4\, d\theta$$

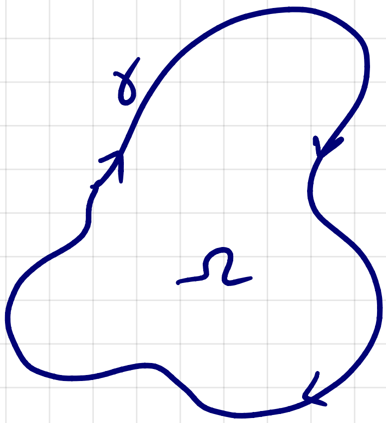
$$= -\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{3}\,\theta\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 4\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} + 0 - \frac{1}{12}(\underbrace{\operatorname{sen} 8\pi}_{=0} - \underbrace{\operatorname{sen} 0}_{=0}) = -\frac{4\pi}{3}$$

COROLÁRIO: Seja γ um caminho seccionalmente suave, e $\Omega = \text{int}(\gamma)$. A área A da região Ω é dada por

$$A = \frac{1}{2}\oint_\gamma x\,dy - y\,dx \,.$$

DEMONSTR.:



Basta notar que

$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy$ é tal que

$$\begin{cases} P(x,y) = -y \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = -1 \\ Q(x,y) = x \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1 \end{cases}$$

Então, pelo T. de Green:

$$\underbrace{\oint_\gamma x\,dy - y\,dx} = \oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_\Omega (1 - (-1))\,dA =$$

$$= \underbrace{2\iint_\Omega dA} \qquad (\div 2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\oint_\gamma x\,dy - y\,dx = \iint_\Omega 1 \cdot dA = A \,.$$

$\square$

Ex.: Considere γ a circunferência $x^2 + (y-1)^2 = 1$ do exemplo anterior. A medida da área do círculo subtendido será:

$$A = \frac{1}{2}\oint_{\gamma} x\,dy - y\,dx \quad , \text{ onde}$$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t + 1 \end{cases} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} dx = -\operatorname{sen} t\,dt \\ dy = \cos t\,dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos t \cdot \cos t\,dt - (\operatorname{sen} t + 1) \cdot (-\operatorname{sen} t\,dt)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\underbrace{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}_{=1} + \operatorname{sen} t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \operatorname{sen} t)\,dt =$$

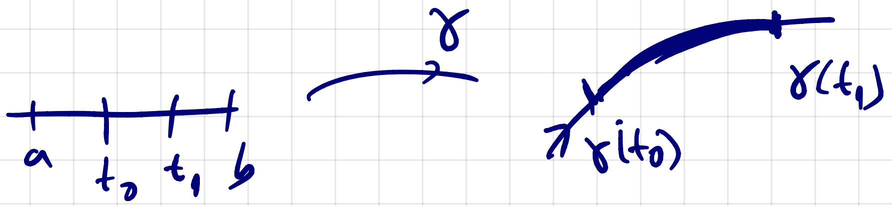
$$\frac{1}{2} \cdot (t - \cos t)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(2\pi - \underline{\cos 2\pi} - (0 - \cos 0)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi - \cancel{1} + \cancel{1}) = \pi \text{ unidades de área.}$$

NOTAÇÃO VETORIAL DO T. DE GREEN!

Def.: Dizemos que uma curva suave $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ é parametrizada pelo comprimento de arco se

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| \, dt = t_1 - t_0 .$$



PROP.: Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva suave. Então, γ é parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $\|\gamma'(t)\| = 1$.

DEMONSTR.:

($\Leftarrow$) Suponha que $\|\gamma'(t)\| = 1$, $\forall\, t \in [a,b]$.

Vamos mostrar que γ é parametrizada pelo comprimento de arco. De fato;

$$\int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{=1} \, dt = \int_{t_0}^{t_1} 1 \, dt = t \Big|_{t_0}^{t_1} = t_1 - t_0 ,$$

o que mostra que γ é parametrizada pelo comprim. de arco.

($\Rightarrow$) Reciprocamente, suponha que γ seja parametrizada pelo comprimento de arco. Vamos mostrar que $\|\gamma'(t)\| = 1$. Defina $\ell : [a,b] \to \mathbb{R}$ por:

$$\ell(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\|\,du = t - t_0$$

POIS γ É PARAM. PELO COMPRIM. DE ARCO.

Então, $\ell'(t) = 1$.

Por outro lado,

$$\ell'(t) = \frac{d\ell}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\|\,du = \|\gamma'(t)\|$$

CÁLCULO II

Ou seja, obtemos:

$$\|\gamma'(t)\| = \ell'(t) = 1.$$

□

Vamos à primeira representação vetorial do T. de Green:

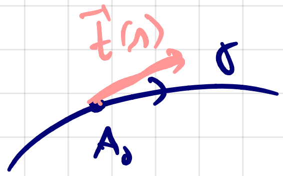
Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, dada por

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)).$$

Ou seja, $\|\gamma'(s)\| = 1$. (vetor unitário);

onde $\gamma'(s) = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right)$;

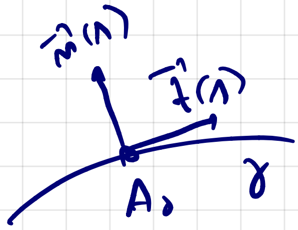
Define $\vec{t}(s) = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right)$ o vetor tangente unitário à γ em um ponto A_0



Define $\vec{n}(s) = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right)$, também unitário.

e $\underbrace{\vec{n}(s) \cdot \vec{t}(s)} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right) \cdot \left(\frac{dy}{ds}, \frac{dy}{ds} \right) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ORTOGONAIS}}}{0}$

$\vec{n}(s)$ é o vetor normal unitário em A_0.



Seja $\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ um campo vetorial. Note que

$$\vec{F} \cdot \vec{n}(s) = (P; Q) \cdot \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right) =$$

$$P \cdot \frac{dy}{ds} - Q \cdot \frac{dx}{ds}$$

Dem.:

$$\oint_\gamma \vec{F} \vec{n}(s)\, ds = \oint_\gamma \left(P \frac{dy}{ds} - Q \frac{dx}{ds} \right) ds$$

$$= \oint_\gamma P\,dy - Q\,dx = \oint_\gamma -Q\,dx + P\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{T. GREEN}}}}{=}$$

$$= \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(P) - \left(\frac{\partial}{\partial y}(-Q) \right) \right] dA = \iint_\Omega \left(\underbrace{\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}}_{= \operatorname{div} \vec{F}} \right) dA$$

Ou seja, se γ for caminho parametrizado pelo comprim. de arco, $\vec{n}(s)$ o vetor normal unitário em γ, então,

$$\oint_{\gamma} \vec{F}\cdot\vec{n}(s)\,ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}\,.\,dA.$$

chamado de TEOR DA DIVERGÊNCIA de GAUSS.