CÁLCULO IV :

01/03/24 — AULA 19

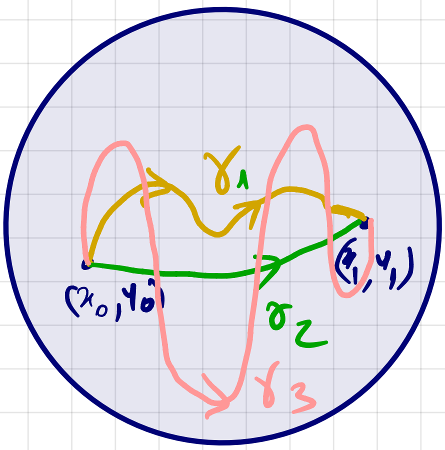
Conforme prometido na aula passada, veremos uma versão vetorial para o T.F.C.

TEOREMA: Seja γ uma curva seccionalmente suave(*) definida em um disco $D \subset \mathbb{R}^2$, do ponto (x_0, y_0) ao ponto (x_1, y_1). Se $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ for um campo vetorial conservativo, com $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função potencial, então, a integral de linha

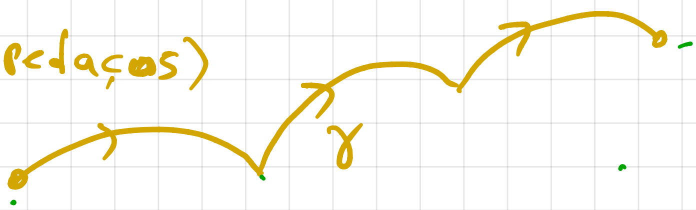
$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

independe do caminho γ, e

$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} = \varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_0, y_0)$$



(*) uma curva γ é dita seccionalmente suave se for suave em partes (pedaços)



Obs.: Este resultado foi enunciado e será provado no caso $\mathbb{R}^2$. No entanto, vale em $\mathbb{R}^m$.

DEMONSTR.: Primeiramente, considere $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ suave. de (x_0, y_0) até (x_1, y_1).

Escreva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

Seja $\vec{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$. Como $\vec{F}$ é conservativo, $\exists\, \varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função potencial tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$. Denotemos $\begin{cases} \gamma(a) = (x_0, y_0) \\ \gamma(b) = (x_1, y_1) \end{cases}$.

Disso:

$$\underbrace{\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt =$$

$$\int_a^b \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t))\,dt =$$

$$\int_a^b \Big(P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t))\Big) \cdot (x'(t), y'(t))\,dt$$

prod. escalar.

$$= \int_a^b P(x(t), y(t)) \cdot \underbrace{x'(t)\,dt}_{dx} + Q(x(t), y(t)) \cdot \underbrace{y'(t)\,dt}_{dy}$$

$$= \underbrace{\int_a^b (P \cdot dx + Q\,dy)}_{}.$$

Como $\vec{F}$ é campo conservativo, então

$$\nabla \varphi = \vec{F} = (P, Q)$$

Disso temos que $d\varphi = P\,dx + Q\,dy$.

Logo, teremos:

$$\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r} = \int_a^b P\,dx + Q\,dy = \int_a^b d\varphi(x(t), y(t))$$

$$\varphi(x(b), y(b)) - \varphi(x(a), y(a));$$

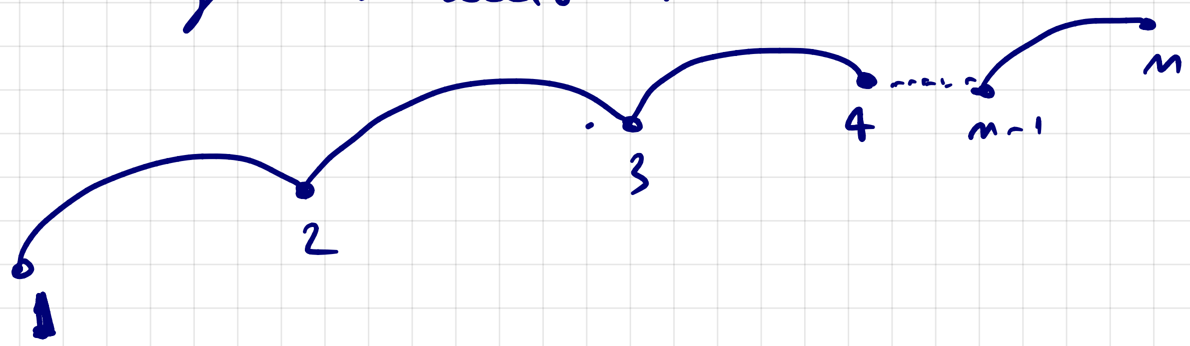
onde: $\begin{cases} (x(b), y(b)) = \gamma(b) = (x_1, y_1) \\ (x(a), y(a)) = \gamma(a) = (x_0, y_0) \end{cases}$

Ou seja,

$$\boxed{\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r} = \varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_0, y_0).}$$

no caso de γ suave.

Considere agora γ seccionalmente suave.



No esquema acima temos que γ é composto por n partes suaves. Tome, na indicação acima que

$$\begin{aligned} 1 &= (x_0, y_0) \\ 2 &= (x_1, y_1) \\ 3 &= (x_2, y_2) \\ &\vdots \\ n &= (x_{n+1}, y_{n+1}) \end{aligned}$$

Mostrar que $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(x_{n+1}, y_{n+1}) - \varphi(x_0, y_0)$.

Em cada parte suave: de 1 para 2, de 2 para 3, ..., de n para $n+1$, vale a primeira parte do teorema. Ou seja:

$$\int_\gamma \vec{F} \, d\vec{r} = \underbrace{\cancel{\varphi(x_1, y_1)} - \varphi(x_0, y_0)}_{1} + \underbrace{\cancel{\varphi(x_2, y_2)} - \cancel{\varphi(x_1, y_1)}}_{2} +$$

$$+ \underbrace{\cancel{\varphi(x_3, y_3)} - \cancel{\varphi(x_2, y_2)}}_{3} + \cancel{\cdots} + \underbrace{\varphi(x_{n+1}, y_{n+1}) - \cancel{\varphi(x_n, y_n)}}_{n}$$

$$= \varphi(x_{n+1}, y_{n+1}) - \varphi(x_0, y_0),$$ como desejávamos.

$\square$

EXEMPLO: Seja $\vec{F}(x,y) = \frac{1}{y}\vec{i} - \frac{x}{y^2}\vec{j}$ e γ qualquer curva seccionalmente suave de $A(5,-1)$ a $B(9,-3)$. Mostre que $\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r}$ independe do caminho γ entre A e B. Em seguida, calcule esta integral.

SOLUÇÃO: Para mostrar que $\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r}$ independe do caminho γ, precisamos mostrar que $\vec{F}$ é um campo conservativo.

Sendo $\vec{F} = \left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}\right) = (P, Q)$, verifiquemos se

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1}{y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$ Logo, é um campo conservativo.

Isto mostra que a integral de linha $\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r}$ independe do caminho γ, desde que seja do ponto A ao ponto B. Assim, podemos escolher qualquer caminho para resolvê-la ou, ainda, obter uma função potencial φ para usar o "TFC vetorial"

$\varphi(x,y)$ é tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$, ou seja

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = (P, Q)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = P \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \quad \text{, i.e;}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{y} \quad \text{e} \quad \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}}_{(*)}.$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(x,y) = \int_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx = \int \frac{1}{y}\, dx = \frac{1}{y} \cdot x + g(y)$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{x}{y} + g(y)$$

Derivando em y, obtemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y} + g(y)\right) = -\frac{x}{y^2} + g'(y)$$

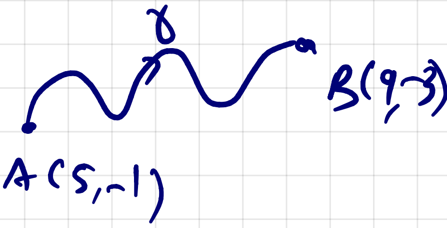
Comparando com $(*)$, obtemos:

$$\cancel{-\frac{x}{y^2}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \cancel{-\frac{x}{y^2}} + g'(y)$$

$$\Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = k.$$

Portanto, $\varphi(x,y) = \dfrac{x}{y} + g(y)$

$$\varphi(x,y) = \frac{x}{y} + k.$$



Logo, temos:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

$$= \frac{9}{-3} + k - \left(\frac{5}{-1} + k\right)$$

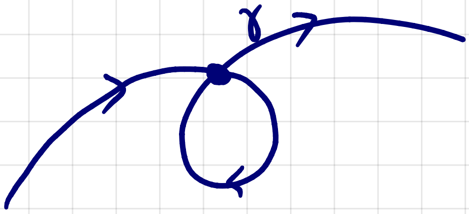
$$= -3 + \cancel{k} + 5 - \cancel{k} = 2$$

CAMINHOS FECHADOS Quando $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ for tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$, dizemos que o caminho γ é fechado, e denotamos isto, na integral de linha de um campo $\vec{F}$, escrevendo:

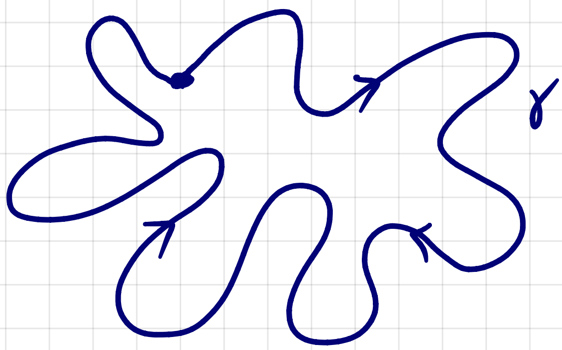
$$\oint_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} \quad \text{ou} \quad \oint_\gamma \vec{F}\, d\vec{r}, \text{ onde}$$

a seta indica a orientação da curva, que no caso acima, está no sentido anti-horário

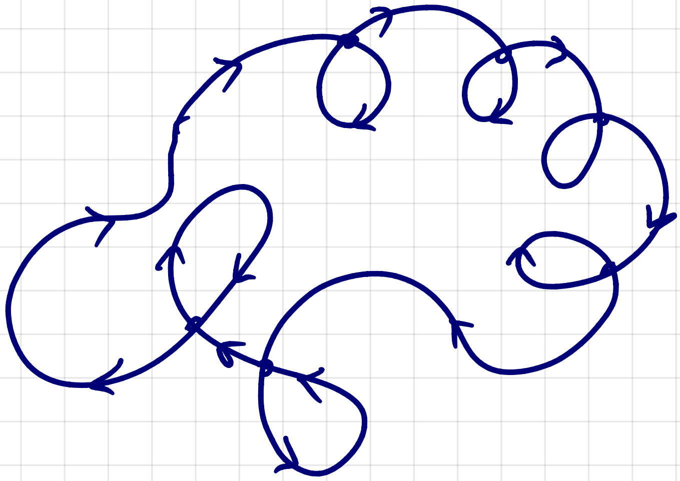
Def.: Dizemos que um caminho $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ é simples quando não existirem nós, ou seja, pontos $t_0, t_1 \in [a,b]$ tais que $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$.



CAMINHO NO $\mathbb{R}^2$ ABERTO, E NÃO SIMPLES.



CAMINHO NO $\mathbb{R}^2$ SIMPLES E FECHADO.



CAMINHO NO $\mathbb{R}^2$, FECHADO E NÃO SIMPLES.

Isto posto, podemos enunciar a seguinte consequência da PROPOSIÇÃO do "TFC vetorial".

<u>COROLÁRIO</u>: Se $\vec{F}$ for um campo vetorial conservativo, então,

$$\oint_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} = 0$$

(i.e., a integral em um caminho fechado será zero, pois o campo $\vec{F}$ é conservativo).

<u>DEMONSTR.</u>: De fato, pelo "TFC vetorial", temos que

$\exists\ \varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ função potencial tal que, para $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ caminho fechado qualquer, e então $\gamma(a) = \gamma(b)$

$$\oint_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = 0$$

□

O seguinte resultado transforma o problema de calcular uma integral de linha no $\mathbb{R}^2$ em um cálculo de integral dupla.

TEOREMA DE GREEN: Seja $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva seccionalmente suave, fechada e simples e $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo vetorial com derivadas parciais contínuas, $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$. Então,

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA,$$

onde $\Omega = \text{int}(\gamma)$.

DEMONSTR.: Provaremos o caso de γ suave; γ curva fechada. Se o campo $\vec{F}$ for conservativo o resultado é trivial pois, por um lado,

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = 0,$$

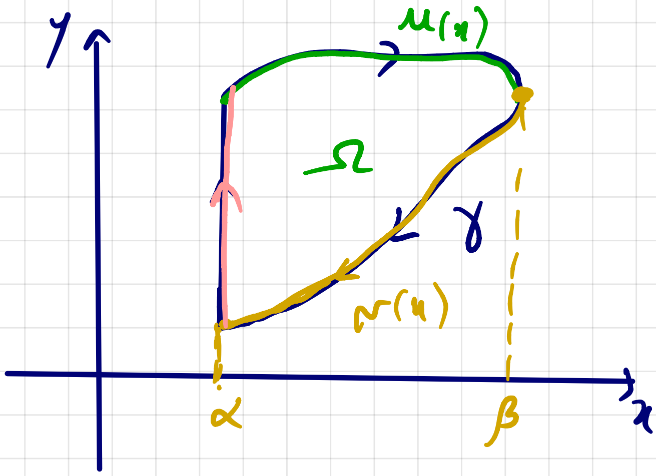
em virtude do corolário anterior, e por outro lado, sendo $\vec{F}$ conservativo, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$; logo

$$\iint_\Omega \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{=0} dA = 0.$$

Suponha que $\vec{F}$ não é conservativo.

Note que $$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \underbrace{\oint_\gamma P\,dx}_{(I)} + \underbrace{\oint_\gamma Q\,dy}_{(II)}$$

Primeiramente, considere γ (fechado) tal que qualquer reta vertical que cruze por γ vai interceptá-lo em no máximo 2 pontos, ou será toda a reta vertical.



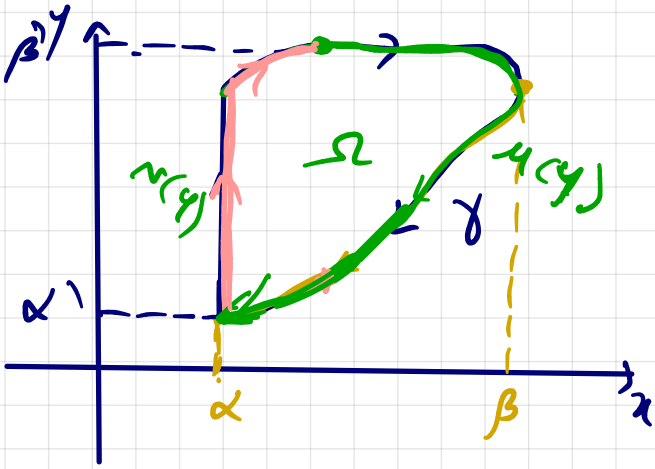
γ se decompõe em duas funções:
$y = u(x)$;
$y = v(x)$.

$$(I): \oint_\gamma P(x,y)\,dx = \int_\alpha^\beta P(x,u(x)) + \int_\beta^\alpha P(x,v(x))\,dx + \underbrace{\int_\alpha^\alpha P(x,y)\,dx}_{=0}$$

$$= \int_\alpha^\beta P(x,u(x))\,dx - \int_\alpha^\beta P(x,v(x))\,dx =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left(-\int_{v(x)}^{u(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\right)dx = -\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$$

(II): $\oint_\gamma Q(x,y)\,dy = ?$



neste caso, decompondo γ em 2 funções:

$x = u(y)$

$x = v(y)$

Disso, temos:

$$\text{(II)}: \oint_\gamma Q\,dy = \int_{\alpha'}^{\beta'} Q(v(y),y)\,dy + \int_{\beta'}^{\alpha'} Q(u(y),y)\,dy =$$

$$= \int_{\alpha'}^{\beta'} Q(v(y),y)\,dy - \int_{\alpha'}^{\beta'} Q(u(y),y)\,dy =$$

$$= \int_{\alpha'}^{\beta'} \int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dA.$$

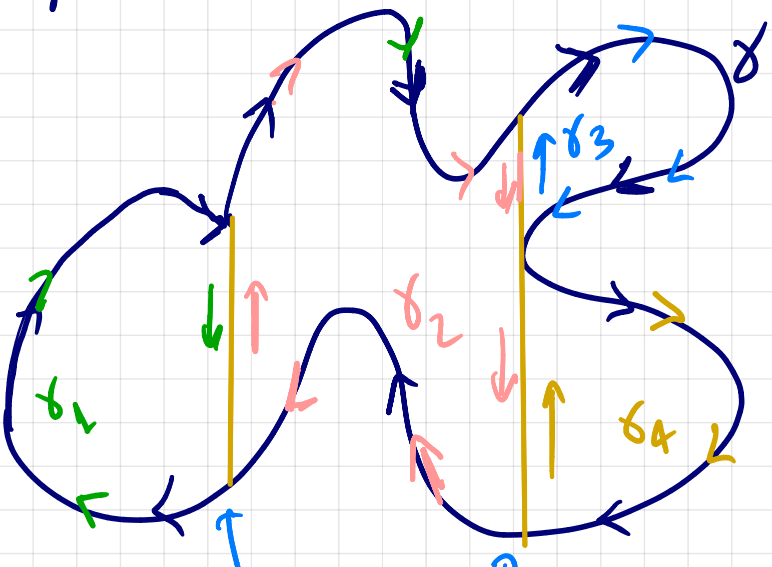
Disso, obtemos:

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \oint_\gamma P\,dx + \oint_\gamma Q\,dy =$$

$$= -\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dA + \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dA =$$

$$= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

__Caso geral__: γ é um caminho fechado simples, mais geral do que o caso anterior, i.e. o traçado de γ, ao passarmos qualquer reta vertical cortando-o pode interceptar em mais de 2 pontos, como por exemplo:



Basta decompor γ em partes de tal modo que cada parte decomposta recaia no caso anterior.

nestas retas verticais as integrais de Linha se cancelarão, pois no percurso para γ_1, na 1ª reta vertical $\int_{\downarrow}$ terá sinal contrário à $\int_{\uparrow}$, etc.

Disso,
$$\oint_{\gamma} = \oint_{\gamma_1} + \oint_{\gamma_2} + \oint_{\gamma_3} + \oint_{\gamma_4} = \left[\text{pois nos trechos verticais se cancelam} \right]$$

$$= \iint_{\Omega_1} + \iint_{\Omega_2} + \iint_{\Omega_3} + \iint_{\Omega_4} = \iint_{\Omega}$$

$\square$