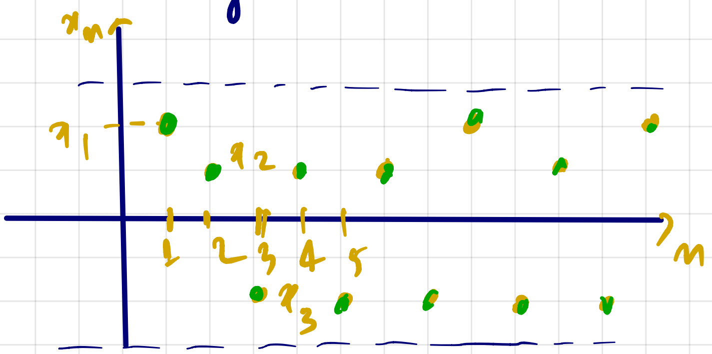
CÁLCULO 2

05/03/24 – AULA 21

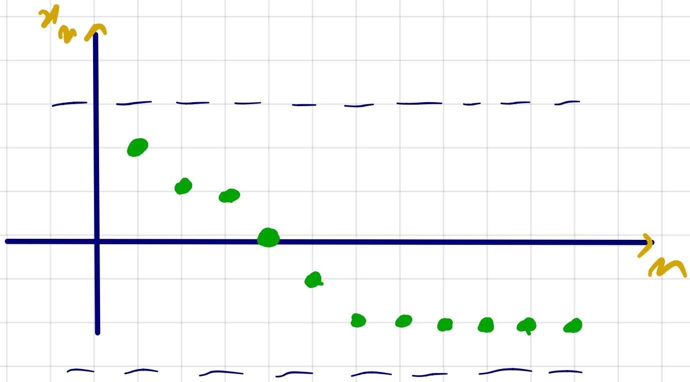
No final da aula passada, no estudo de sequências numéricas, mostramos que, se uma dada seq. (x_n) for convergente, então ela é limitada. No entanto vimos que a recíproca, em geral, é falsa, ou seja o fato de uma seq. ser limitada não é garantia de que seja convergente. Por exemplo, $x_n = (-1)^n$ é limitada, <u>mas</u> não converge.

Para garantir uma recíproca, precisamos acrescentar a monotonicidade como hipótese, ou seja temos o seguinte resultado:

<u>PROPOSIÇÃO</u>: Toda sequência monótona e limitada é convergente.



seq. Limitada, mas não é monótona. (NÃO CONVERGE)



seq. Limitada e monótona (Será convergente.)

<u>DEMONSTR.</u>: Seja (x_n) uma seq. monótona e limitada. Sem perda de generalidade, assuma

que (x_n) seja crescente.

Então, $x_n \le x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

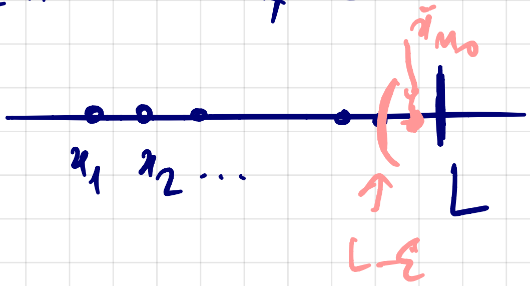
Como (x_n) também é limitada, então, $\exists\, A \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \le A$

Seja $X = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ o conj. de todos os termos da seq. (x_n). Então, X é um conj. limitado superiormente. No caso, A é uma cota superior para o conj. X. Logo, existe $L \in \mathbb{R}$, onde $L = \sup X$. , ou seja, $x_n \le L$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

AF.: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = L$.

De fato, como $L = \sup X$, então,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L - \varepsilon < x_{n_0} \le L$



Como (x_n) é uma seq. crescente, então,

$$\forall n \ge n_0 \Rightarrow x_n \ge x_{n_0}$$

Então, obtemos, $\forall n \ge n_0$,

$$L - \varepsilon < x_{n_0} \le x_n \le L < L + \varepsilon .$$

Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n \geq n_0$, $L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$, i.e.,

$$-\varepsilon < x_n - L < \varepsilon \iff |x_n - L| < \varepsilon.$$

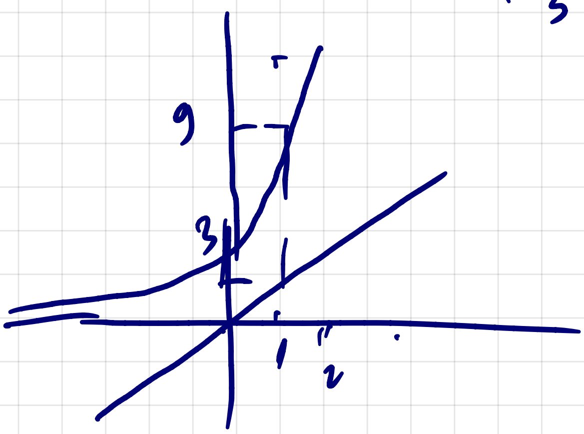
Isto é, acabamos de provar que
$$\lim_{n\to\infty} x_n = L,$$
i.e., a seq. (x_n) é convergente. $\square$

EXEMPLO: Mostre que a sequência (x_n) dada por: $x_n = \dfrac{n}{3^{n+1}}$ é convergente.

SOLUÇÃO: De posse da proposição provada acima, para mostrar que (x_n) é convergente basta mostrar que ela é monótona e limitada.

AF. 01 (x_n) é limitada. De fato,

$$|x_n| = \left|\frac{n}{3^{n+1}}\right| = \frac{n}{3^{n+1}} < \frac{n}{n} = 1.$$
$$\Uparrow$$



$$3^{n+1} = 3^n \cdot 3 > n.$$ (ISSO PODE SER MOSTRADO POR INDUÇÃO)
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{3^{n+1}} < \frac{1}{n}$$ (TOMANDO OS INVERSOS)

$$\Rightarrow |x_n| < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, (x_n) é limitada.

AF. 02: (x_n) é monótona. De fato, mostremos que (x_n) é decrescente.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{n+1}{3^{n+2}}}{\frac{n}{3^{n+1}}} = \frac{n+1}{3^{n+2}} \times \frac{3^{n+1}}{n} =$$

$$= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\cancel{3^{n+1}}}{\cancel{3^{n+1}} \cdot 3} = \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\leq 1}\right) \leq \frac{1}{3} \cdot (1+1) = \frac{2}{3} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1, \quad \forall n \quad \text{i.e.,} \quad x_{n+1} < x_n, \ \forall n,$$

Logo, a seq. (x_n) é decrescente (monótona)

Assim, pelas afirmações 01 e 02, segue por proposição que a seq. (x_n) é convergente.

PROPOSIÇÃO: (Unicidade do Limite) Se o limite de uma sequência existir, ele é único.

PROPOSIÇÃO: (PROPRIEDADES ARITMÉTICAS DOS LIMITES DE SEQUÊNCIAS) Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências convergentes com $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. Então,

(i) $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$

(ii) $\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b$

(iii) $\lim_{n\to+\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$; $b \neq 0$, $y_n \neq 0, \forall n$.

DEMONSTR.: Ver material Pdf que será divulgado a posteriori.

SÉRIE NUMÉRICA

Vamos dar sentido para somas infinitas, do tipo

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

Def.: Chama-se SÉRIE NUMÉRICA a soma infinita de números reais

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

[a_n chama-se TERMO GERAL DA SÉRIE]

Dada uma série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, podemos montar uma SEQUÊNCIA DE SOMAS PARCIAIS (s_n) como:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$
$$\vdots$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Def.: Dizemos que uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente, se a seq. (s_n) das somas parciais for convergente, ou seja, se

$$\exists \lim_{n\to\infty} s_n = S$$

Neste caso, S é chamado de SOMA da série.

Ou seja,

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Quando existir este limite (a soma da série), diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é <u>convergente</u>. Do contrário, a série é dita <u>divergente</u>.

<u>EX.:</u> A série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$ é convergente ou divergente?

Para responder esta questão, precisamos investigar a seq. (s_n) das somas parciais.

Note que

$$a_n = \frac{1}{n^2-1} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n-1}$$

(decomposição em frações parciais)

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{A(n-1)+B(n+1)}{(n+1)(n-1)}$$

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{An - A + Bn + B}{n^2-1}$$

$$+\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=1 \end{cases}$$
$$2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=-B \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo;

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n-1} =$$

$$= -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n-2} = a_n$$

Daí;

$$s_k = a_2 + a_3 + \dots + a_k$$ (soma parcial da série)

$$s_k = \underbrace{\left(-\frac{1}{4+2} + \frac{1}{4-2}\right)}_{a_2} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2\cdot 3+2} + \frac{1}{2\cdot 3-2}\right)}_{a_3} +$$

$$+ \underbrace{\left(-\frac{1}{2\cdot 4+2} + \frac{1}{2\cdot 4-2}\right)}_{a_4} + \dots + \underbrace{\left(-\frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k-2}\right)}_{a_k}$$

$$= \cancel{-\frac{1}{6}} + \frac{1}{2} \cancel{- \frac{1}{8}} \cancel{+ \frac{1}{4}} - \frac{1}{10} \cancel{+ \frac{1}{6}} \cancel{- \frac{1}{12}} \cancel{+ \frac{1}{8}} - \dots$$

$$\dots + \cancel{-\frac{1}{2k+2}} + \frac{1}{2k-2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2k-2}$$

$$\Rightarrow s_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k-2}$$

$$\underset{\sim}{s} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n = \lim_{k \to \infty} s_k = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2k-2}}_{\to 0}$$

$$= \underset{\sim}{\frac{1}{2}}$$

Logo, a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ é convergente, e sua soma é $\frac{1}{2}$.

<u>PROPOSIÇÃO</u>: Se uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

DEMONSTR.: Note que
$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

De fato:
$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2 \Rightarrow a_2 = s_2 - a_1 = s_2 - s_1$$
$$s_3 = \underbrace{a_1 + a_2}_{s_2} + a_3 = s_2 + a_3 \Rightarrow a_3 = s_3 - s_2$$
$$\vdots$$

Como $\sum a_n$ é convergente, $\exists\ s = \lim_{n\to\infty} s_n$

Disso; sendo $a_n = s_n - s_{n-1}$, então:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} s_n - \lim s_{n-1}$$
$$= s - s = 0.$$

$\square$

Obs.: A recíproca, em geral, é falsa, ou seja, se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja convergente.

Ex.: A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. (série harmônica)

Neste caso, $a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, mas esta série é divergente. Mostraremos isto na próxima aula.