CÁLCULO 2

07/03/24 – AULA 22

A SÉRIE HARMÔNICA: é a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots$$

Afirmamos que esta série é DIVERGENTE. De fato, escreva ;; agrupando em potências de 2 ; c.f. abaixo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \overbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}^{2} + \overbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}^{4} + \overbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \cdots\right.}^{8}$$

$>\frac{1}{4}$; $>\frac{1}{8}$, $>\frac{1}{8}$, $>\frac{1}{8}$; $>\frac{1}{16}$, $>\frac{1}{16}$, $>\frac{1}{16}$ - - -

$4 = 2^2$

$3 < 4 = 2^2 \to \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$

$8 = 2^3$

$5 < 8 \Rightarrow \frac{1}{5} > \frac{1}{8}$; $6 < 8 \Rightarrow \frac{1}{6} > \frac{1}{8}$

$7 < 8 \Rightarrow \frac{1}{7} > \frac{1}{8}$

$$\left.\cdots + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \overbrace{\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \cdots + \frac{1}{32}\right)}^{16} + \frac{1}{33} + \cdots >$$

$>\frac{1}{32}$, $>\frac{1}{32}$ . . .

$$> 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{2\text{ aditivos}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{4\text{ aditivos}} +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots \frac{1}{16}\right)}_{8\text{ aditivos}} + \underbrace{\left(\frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{32}\right)}_{16\text{ aditivos}} + \cdots$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{64}+\dots+\frac{1}{64}\right)}_{32 \text{ aditivos}}+\underbrace{\left(\frac{1}{128}+\dots+\frac{1}{128}\right)}_{64 \text{ aditivos}}+\dots$$

$$= 1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{16}+16\cdot\frac{1}{32}+\dots$$

$$= 1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}_{1}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}_{''}+\dots$$

$$= 1+1+1+1+\dots \longrightarrow +\infty$$

Ou seja, obtemos:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} > 1+1+1+1+\dots \to \infty$$

Logo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty$, ou seja,

a série harmônica é divergente.

SÉRIE GEOMÉTRICA: É a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = q^0 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \cdots$$

$$= 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + \cdots$$

Note que; sendo $s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$

a soma parcial da série. (soma dos $n+1$ primeiros termos)

multiplicando por q, vamos obter:

$$q \cdot s_n = q(1 + q + q^2 + \cdots + q^n)$$

$$= q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q^{n+1}$$

Efetuando $q \cdot s_n - s_n$ obtemos:

$$q \cdot s_n = \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cancel{q^3} + \cancel{q^4} + \cdots + \cancel{q^n} + q^{n+1}$$

$$- \quad s_n = 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cancel{q^3} + \cancel{\cdots} + \cancel{q^n}$$

$$q \cdot s_n - s_n = -1 + q^{n+1}$$

$$s_n(q-1) = q^n - 1$$

$$\Rightarrow s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} = -\frac{1}{q-1} + \frac{q^n}{q-1}$$

$$= \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}$$

Então, a soma S dessa série será:

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & \text{se } |q|<1. \\ \infty, & \text{se } |q|>1 \end{cases}$$

conclusão:

A série geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ é

convergente (e converge para $\frac{1}{1-q}$), se $|q|<1$,

e divergente se $|q|>1$

Além disso, se $q=1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1^n = 1+1+1+\dots \text{ (diverge)}$$

i.e., $\sum q^n$ diverge se $|q| \geq 1$.

Ex.: A série $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}$ é convergente ou divergente?

SOLUÇÃO: $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$,

com $q = \frac{1}{2} < 1$.

Logo, esta série é convergente.

PROPOSIÇÃO: Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ duas séries convergentes. Então,

$$\sum a_n + b_n, \quad \sum a_n - b_n \quad \text{e} \quad \sum c \cdot a_n$$

são convergentes, e

$$\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n;$$

$$\sum (a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n$$

$$\sum c \cdot a_n = c \cdot \sum a_n.$$

DEMONSTR.: Basta observar que série é, de fato, pensada como uma seq. de somas parciais

Então, as propriedades acima seguem do estudo de limites de sequências.

Por exemplo, sejam (A_n) e (B_n) as seq. das somas parciais das séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, i.e.,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{e} \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Então, define (S_n) por: $S_n = A_n + B_n$.

Como $\exists \lim_{n\to\infty} A_n := A$ e $\exists \lim_{n\to\infty} B_n = B$,

então $\exists \lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) = A + B = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n$

i.e., $\exists \sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$.

$\square$

<u>Ex.</u>: A série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2+2^n}{3^n}$ é convergente ou divergente?

<u>Solução</u>: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2+2^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3^n} + \frac{2^n}{3^n}\right) =$

$$= 2 \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\text{CONVERGE}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\text{CONVERGE}},$$

que é convergente, por ser a soma de duas séries geométricas de razão <1 cada uma, e, portanto, convergentes.

PROPOSIÇÃO: Uma série de termos positivos é convergente se, e somente se, a sua seq. de somas parciais for limitada superiormente.

DEMONSTR.: De facto, como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, é tal que $a_n > 0$, $\forall n$, então, a seq. (s_n) das somas parciais $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ é crescente; i.e., monótona. Sendo, além disso, limitada superiormente. Então, pelo estudo feito em sequências segue que (s_n) é convergente.
Esta é a ideia da prova. $\square$

ALGUNS TESTES DE CONVERGÊNCIA:

Como mencionamos anteriormente, há séries numéricas às quais é impossível obter a sua soma. No entanto, pode ser possível concluir se a mesma é convergente ou divergente. Sendo convergente, pode-se, então, procurar implementar algum algoritmo computacional, de modo a obter uma soma para a série, com uma boa aproximação.

Se for divergente, não perdemos tempo para tentar obter computacionalmente uma soma.

<u>TEOREMA:</u> (TESTE DA COMPARAÇÃO): Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries de termos positivos, com $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Então:

(i) se $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ também converge.

(ii) se $\sum a_n$ diverge, então $\sum b_n$ também diverge.

[ou seja, convergência da maior implica na convergência da menor, e divergência da menor implica na divergência da maior]

<u>DEMONSTR.:</u> Provaremos apenas o item (i).

Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos, com $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Suponha que $\sum b_n$ convirja.

Sejam (A_n) e (B_n) as seq. das somas parciais, i.e.,
$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{e} \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k .$$

Como $\sum b_n$ converge, segue que

$$\exists\ B = \lim_{n\to\infty} B_n .$$

Além disso, (B_n) é limitada superiormente por $B = \lim_{n\to\infty} B_n = \sup B_n$, pois (B_n) será uma seq. de termos positivos, logo monótona e limitada (pois é convergente).

Assim,

$$a_n \leq b_n , \ \forall n \therefore$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k}_{A_n} \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \leq B$$

$$\Rightarrow \quad A_n \leq B, \ \forall n$$

Ou seja, a seq (A_n) é limitada e monótona, pois é crescente. Logo, é convergente.

$\square$

<u>Ex.:</u> A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5n-2}$ é convergente ou divergente?

<u>Solução:</u> $5n > 5n-1 , \ \forall n$

$$\Rightarrow \frac{1}{5n} < \frac{1}{5n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{n} \leq \frac{1}{5n-1}$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ é divergente (harmônica)

$\frac{1}{5}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ é divergente

$\sum a_n = \sum \frac{1}{5n}$ é divergente, e

$$a_n \leq b_n = \frac{1}{5n-1}, \forall n$$

$\Rightarrow \sum b_n = \sum \frac{1}{5n-1}$ é divergente, pelo teste da comparação.

<u>TEOREMA</u>: (TESTE DA COMPARAÇÃO DO LIMITE).

Se $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = c > 0$, então ambas as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergem ou divergem.

TEOREMA: (**TESTE DA RAZÃO**): Seja $\sum a_n$ é uma série de termos positivos. Seja

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c. \text{ Então}$$

(i) se $c < 1$, a série é convergente.

(ii) se $c > 1$ ou $c = +\infty$ a série é divergente.

(iii) se $c = 1$, o teste é inconclusivo.

EX.: A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ é convergente ou divergente?

[**Obs.:** $n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$
EX.: $3! = 3.2.1$]

SOLUÇÃO:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1).\cancel{n!}.\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}.2.\cancel{n!}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty.$$ Logo, a série diverge.

TEOREMA: (TESTE DA RAIZ). Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos. Seja

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = c. \quad \text{Então:}$$

(i) se $c<1$, a série é convergente.

(ii) se $c>1$ ou $c=+\infty$ a série é divergente.

(iii) se $c=1$, o teste é inconclusivo.

Ex.: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^n$ converge ou diverge?

Solução: Pelo teste da raiz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[\cancel{n}]{\left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{\cancel{n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+5} = \frac{3}{5} < 1.$$

Logo, esta série é convergente.

Def.: Dizemos que uma série $\sum a_n$ é ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE quando a série dos módulos $\sum |a_n|$ for convergente.