CÁLCULO I.

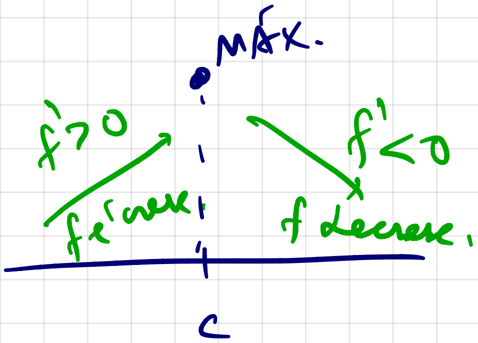
07/03/24 — AULA 23

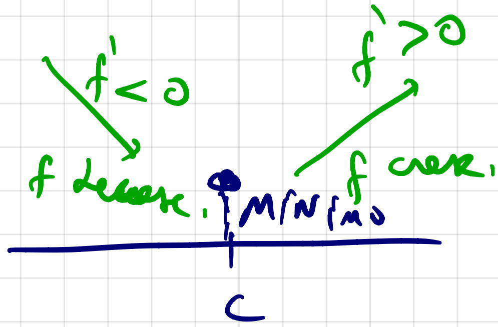
Na aula passada estudamos extremos relativos e absolutos, pontos críticos (onde $f'(x)=0$ e onde $\nexists f'(x)$), máximos e mínimos.

Vimos que, se $f'(x)>0$ em um intervalo I, então f é crescente neste intervalo, e se $f'(x)<0$ em um intervalo, f é decrescente no mesmo.

Embora não precisemos a priori, as recíprocas também valem, sendo f derivável.

Se em c tivermos $f'(c) = 0$ e o seguinte estudo de sinais:

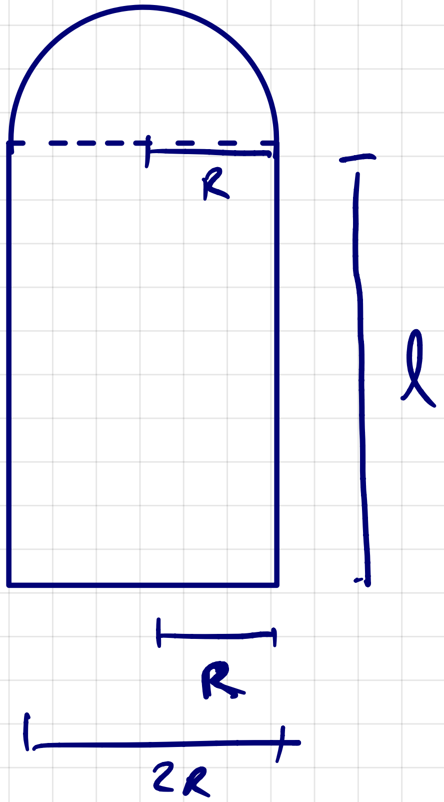




Vejamos alguns exemplos de aplicações de máximos e mínimos:

01) Uma janela em estilo normando tem a forma de um retângulo com um semicírculo sobre ela. Sabendo que o perímetro de uma janela normanda é de 10 m, determine suas medidas de modo que permita a maior passagem de luz.

Solução: A janela possui o formato:



Queremos que a área dessa janela seja máxima.

$$A = A_{QUADR.} + \frac{1}{2} A_{\bigcirc}$$

$$A_{QUADR} = \underbrace{2R}_{base} \cdot l$$

$$A_{\bigcirc} = \pi R^2$$

$\Rightarrow A = 2R \cdot l + \frac{1}{2}\pi R^2$, que depende de l e de R.

Precisamos que esta fórmula dependa de somente uma variável. Para isso, precisamos encontrar alguma relação entre l e R.

$$\text{perímetro} = 2p = 10\,m$$

$$10 = 2l + 2R + \frac{1}{2}\text{ comprim. da circunf.}$$

$$10 = 2l + 2R + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi R.$$

$$10 = 2l + 2R + \pi \cdot R$$

$$10 - 2l = R(\pi + 2)$$

$$-2l = R(\pi+2) - 10$$

$$\boxed{l = \frac{10 - R(\pi+2)}{2}}.$$

Com isso, a área A será:

$$A = 2Rl + \frac{1}{2}\pi R^2$$

$$\Rightarrow A = \cancel{2}R \cdot \left(\frac{10 - R\cdot(\pi+2)}{\cancel{2}}\right) + \frac{1}{2}\pi \cdot R^2$$

$$A = 10R - (\pi+2)\cdot R^2 + \frac{\pi}{2} R^2$$

$$A = 10R + \left(-\pi - 2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot R^2$$

$$A = 10R - \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) \cdot R^2$$

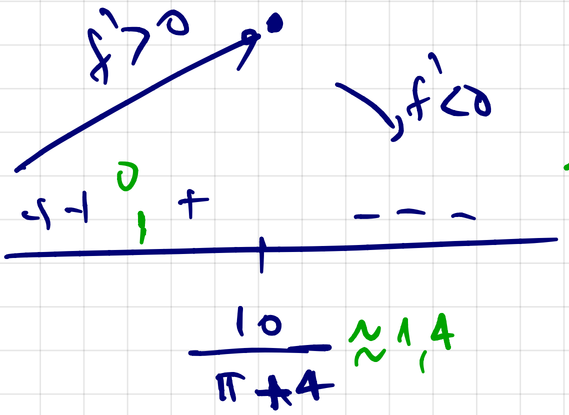
PONTOS CRÍTICOS: $A' = 0$ e $\cancel{\nexists A'}$.

$$A'(R) = 10 - \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) \cdot 2R = 10 - (\pi + 4) \cdot R$$

$$A'(R) = 0 \Leftrightarrow 10 - (\pi+4) \cdot R = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R = \frac{10}{\pi + 4} \text{ m}}.$$

$$\boxed{A'(R) = 10 - (\pi+4)\cdot R}$$



$$\left\{\begin{array}{l} R = 0 \; ; \; A'(R) = 10 - (\pi+4)\cdot 0 = 10 > 0 \\ R = 10 \; ; \; A'(R) = 10 - (\pi+4)\cdot 10 < 0 \end{array}\right.$$

Logo, $R = \frac{10}{\pi+4}$ é um ponto de máximo.

Neste caso, o valor de ℓ será:

$$\ell = \frac{10 - R(\pi+2)}{2} = \frac{10 - \frac{10}{\pi+4}\cdot(\pi+2)}{2}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{10\pi} + 40 - \cancel{10\pi} - 20}{\pi+4}}{2} = \frac{20}{\pi+4} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{10}{\pi+4} \text{ m}.$$

Conclusão, a área será máxima quando

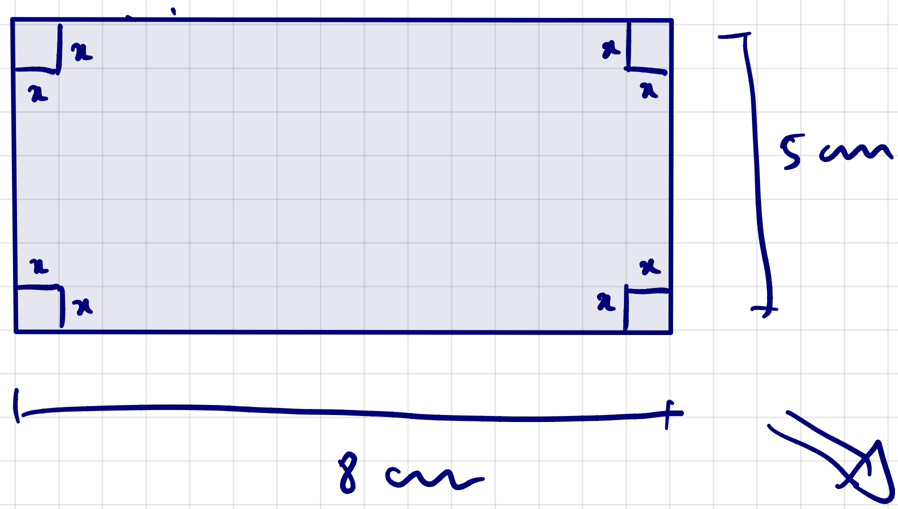
$$\ell = R = \frac{10}{\pi+4} \text{ m}.$$

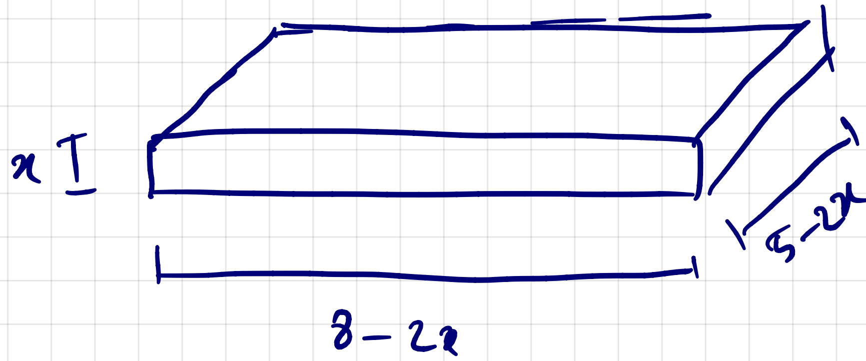
Isso vai permitir a máxima passagem de luz.

LISTA 10 :

7. Um fabricante pretende construir uma caixa retangular a partir de uma lâmina de 8cm×5cm, cortando um quadrado de cada um de seus cantos. Ache o lado desse quadrado para que o volume da caixa a ser construída seja máximo. (Resp. 1cm).

SOLUÇÃO :





O volume V dessa caixa deve ser máximo.

$$V = (8-2x)\cdot(5-2x)\cdot x$$

$$V = (8-2x)(5x-2x^2)$$

$$V = 40x - 16x^2 - 10x^2 + 4x^3$$

$$\therefore V = 4x^3 - 26x^2 + 40x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 52x + 40$$

pontos críticos: onde $V'(x) = 0$ e $\cancel{\nexists V'(x)}$

$$V'(x) = 0 \iff 12x^2 - 52x + 40 = 0 \quad (\div 4)$$

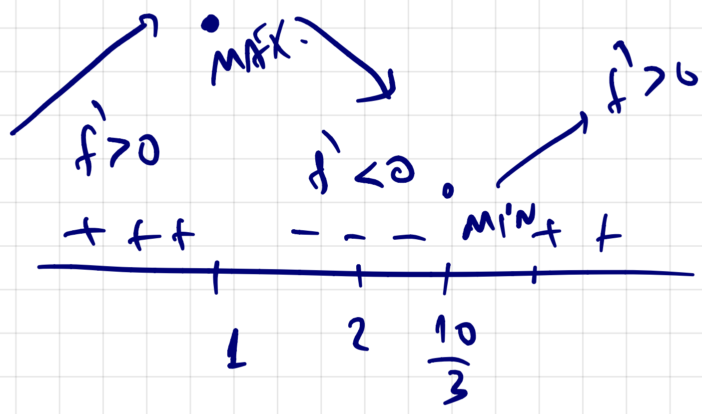
$$\iff 3x^2 - 13x + 10 = 0$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{13 \pm 7}{6}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{20}{6} \Rightarrow x = \frac{10}{3} \\ \text{ou} \\ x = \frac{6}{6} = 1 \end{array} \right.$$

estudo do sinal da derivada: $V'(x) = 12x^2 - 52x + 40$



$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \ ; \ V'(x) = 40 > 0 \\ x = 2 \ ; \ V'(x) = 12.4 - 52.2 + 40 \\ \qquad = 88 - 104 < 0 \\ x = 10 \ ; \ V'(x) > 0 \end{array} \right.$$

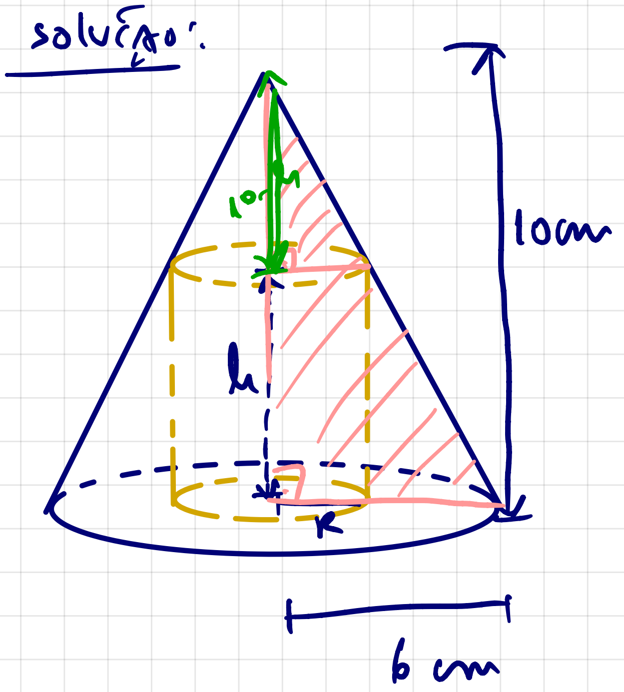
Logo, a caixa a ser construída terá um

volume máximo quando $x = 1$ cm.

Lista 10

10. Ache o raio e a altura de um cilindro circular reto com o maior volume, o qual pode ser inscrito em um cone circular reto com 10 cm de altura e 6 cm de raio.

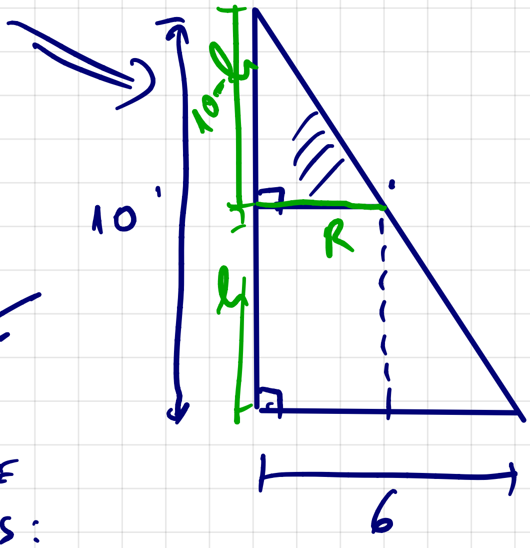
Solução:



$V = V_{cil.}$ deve ser máximo.

$V = Ab . h$

$V = \pi R^2 . h$



Por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{5}{3} \quad \frac{\cancel{10}}{\cancel{6}} = \frac{10-h}{R}$$

$$5R = 3.(10-h)$$

$$5R = 30 - 3h$$

$$\Rightarrow h = \frac{30-5R}{3}$$

Disso, obtemos:

$$V = V(R) = \pi R^2 . h = \pi R^2 . \left(\frac{30 - 5R}{3} \right)$$

$$V(R) = \frac{30\pi}{3} R^2 - \frac{5\pi}{3} R^3$$

$$V(R) = 10\pi R^2 - \frac{5\pi}{3} R^3 .$$

PONTOS CRÍTICOS: onde $V'(R) = 0$ e $\cancel{\nexists V'(R)}$

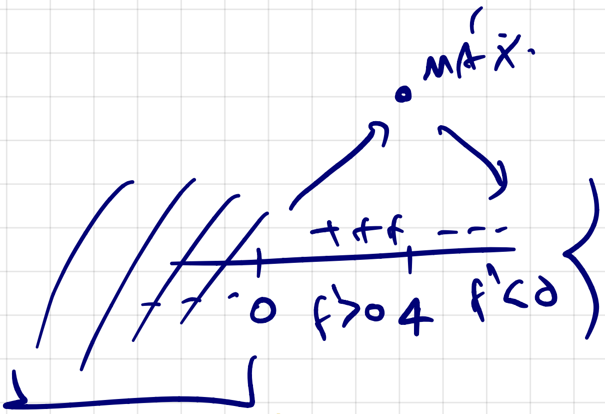
$$V'(R) = 20\pi R - \frac{5\pi}{\cancel{3}} . \cancel{3} R^2$$

$$\boxed{V'(R) = 20\pi R - 5\pi R^2}$$

$$V'(R) = 0 \iff 20\pi R - 5\pi R^2 = 0$$

$$5\pi R . (4 - R) = 0$$

$$\left[\begin{array}{ll} 5\pi R = 0 & \Rightarrow R = 0 \\ 4 - R = 0 & \Rightarrow R = 4 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} R = 1 ; \quad V'(R) = 20\pi - 5\pi > 0 \\ R = 10 ; \quad V'(R) = 200\pi - 500\pi < 0 \end{array} \right.$$

nem analiso antes de $R=0$ e $R=0$ pois não tem sentido neste problema.

Logo, o cilindro possuirá volume máximo quando $r = 4\,cm$. Neste caso, teremos:

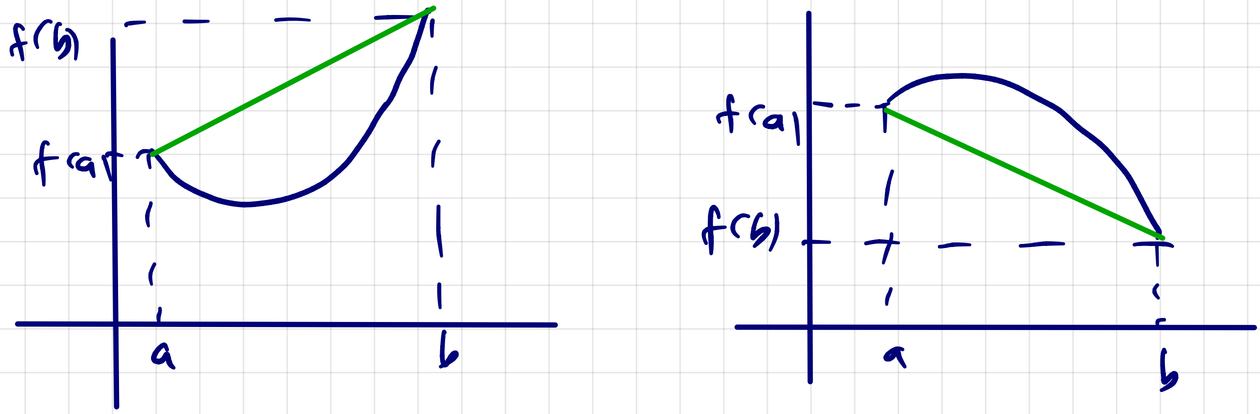
$$h = \frac{30 - 5r}{3} \quad ; \quad , \text{ para } r = 4\,cm:$$

$$h = \frac{30 - 5(4)}{3} = \frac{10}{3}\,cm.$$

CONCAVIDADE E PONTO DE INFLEXÃO:

Def.: Dizemos que uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possui concavidade para cima (C.P.C) em $[a, b]$, se a corda que liga as extremidades $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ ficar acima do gráfico de f.

e dizemos que possui concavidade para baixo (C.P.B) em $[a, b]$, se esta corda ficar abaixo do gráfico de f.



TEOREMA: Uma função f duas vezes derivável possui c.P.C em um intervalo $I \iff f''(x) > 0$, $\forall x \in I$; e possui c.P.B em $I \iff f''(x) < 0$, $\forall x \in I$

Ou seja o sinal da derivada segunda define a concavidade da função.

Ex.: $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x \longrightarrow f'(x) = 0$ fornece cresc/decresc $\nexists f'(x)$.

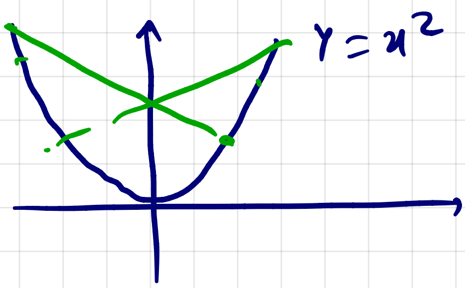
$f''(x) = 2 \longrightarrow f''(x) = 0$ fornece concavidade

$\Downarrow$

$f''(x) = 2 > 0$, $\forall x$. Logo, a parábola

$y = x^2$

possui concavidade para cima, em todo $x \in \mathbb{R}$.



Def.: Chama-se PONTO DE INFLEXÃO o ponto onde muda o sentido da concavidade

Ou seja, faz-se $f''(x)=0$ e se o sinal da derivada segunda mudar em torno da raiz c tal que $f'(c)=0$, então c será um ponto de inflexão (P. I.)

Ex.: $f(x)=x^3$.

$f'(x)=3x^2$

$f''(x)=6x$. $\quad f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x=0$

$\Leftrightarrow x=0$

sinal da f''

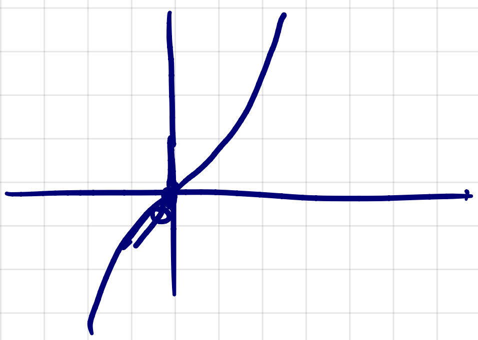
C.P.B $\quad$ C.P.C

$- \; - \quad + \; +$

$\quad\quad 0$

$\begin{cases} x=-1; & f''(-1)=-6<0 \\ x=1; & f''(1)=6>0 \end{cases}$

f'' mudou de sinal, então, $x=0$ é um ponto de inflexão de f.



DIFERENCIAIS: Quando estudamos a derivada como uma aproximação linear apresentamos o conceito de DIFERENCIAL de uma função.

Vimos que df (diferencial de f) é dado por

$$\underset{dy}{df} = f'(x)\,dx$$

Ou seja, as regras de diferenciação são as mesmas da derivação.

De fato, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, onde

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que, $\forall x$: $|\Delta x| < \delta$

$$\Longrightarrow \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \right| < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \qquad -\varepsilon < \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) < \varepsilon$$

$$-\varepsilon.\Delta x < \Delta y - f'(x).\Delta x < \varepsilon.\Delta x$$

Quando $\varepsilon \to 0$, temos

$$\Delta y \simeq f'(x)\,\Delta x.$$

Ex: Use diferenciais para aproximar $\sqrt{4,1}$.

Solução: Tome $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

tome $x = 4$. e $\Delta x = 0,1 = \frac{1}{10}$.

Então, $\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Logo;

$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x$

$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$ $\quad x+\Delta x = 4+0,1 = 4,1$

$f(4,1) \approx f(4) + f'(4) \cdot 0,1$.

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f(4,1) = \sqrt{4,1} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0,1$$

$$= 2 + \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{10} =$$

$$= 2 + \frac{1}{40} = \frac{81}{40}$$

$2,0248$

$\approx$

$$\sqrt{4,1} \approx \frac{81}{40} = 2,025$$